

PUBLICAÇÃO ESPECIAL

Nº 09  
1989

DETERMINAÇÃO DE ORBITA  
GEOESTACIONÁRIA EM TEMPO REAL

Mery P. Pinheiro

Tese de Doutorado  
Rio de Janeiro, Março/89

TESE DE DOUTORADO

DETERMINAÇÃO DE ÓRBITA  
GEOESTACIONÁRIA EM TEMPO REAL

AUTORA: MERY PASSOS PINHEIRO

ORIENTADOR: ATAIR RIOS NETO

OBSERVATÓRIO NACIONAL

MARÇO 1989

AOS MEUS PAIS...

## AGRADECIMENTOS

Ao Dr. Atair Rios Neto, EMBRAER, pela sólida e clara orientação que abrangeu desde a minha formação na área de métodos de estimação até às indispensáveis palavras de estímulo.

Ao Dr. R.V.Martins, O.N, pelas importantes sugestões ocorridas durante os seminários de Mecânica Celeste naquela instituição.

A Dra. D.Lazzaro, O.N, pela revisão rigorosa das equações do apêndice I.

A estrutura da EMBRATEL, representada pelos Eng<sup>os</sup>. M.Alencar, N.Freitas e R.Knorr pelo apoio ao longo de toda a execução da tese; em particular ao Ney pelo crescente incentivo ao desenvolvimento técnico/científico.

Aos astrônomos, E.P.Andrade, J.R.Castro, M.M.Bottino e R.Pinto da Silva, ao Eng.<sup>o</sup> A.Monteiro e à Analista de Sistemas M.R.Scerni Barbosa, integrantes da Seção de Mecânica Celeste da EMBRATEL, pela formação de um ambiente científico saudável que propiciou o surgimento de importantes idéias; em particular, ao Reinaldo, cujo profundo conhecimento do "software" de missão dos satélites Brasilsat A1 e A2, foi indispensável para a execução deste trabalho; ao Alberto que, por estar implantando o propagador de Kamel, propiciou a introdução/comparação de importantes termos de curtos períodos; ao Maurício pela grande ajuda nas rotinas gráficas.

Ao Dr. S.Ferraz-Mello, IAG-USP, pelo apoio inicial na escolha do tema.

Ao Dr. E.D.Andjel, IMPA, pelas prontas respostas a algumas questões matemáticas.

Ao Dr. K.R.Rao, INPE, pela revisão parcial do apêndice I.

Ao Eng.<sup>o</sup> C.N.Vieira, EMBRATEL, pela revisão geral de todo o texto.

Ao Eng.<sup>o</sup> P.E.Gomes Soares, EMBRATEL, por ser meu "intermediário" com o VAX, sempre que este não me "ouvia".

A M.Inês Henrique Martins, EMBRATEL, pelo belíssimo e eficiente trabalho de digitação e à Neide da Silva Coelho, EMBRATEL, pela boa vontade em finalizar a digitação e estética.

## RESUMO

A determinação de uma órbita é um processo que envolve o modelo de propagação da mesma e o método de estimação. O objetivo deste trabalho é obter um estimador de estado autônomo e seqüencial para satélites geoestacionários. A órbita é propagada através de um modelo semi-analítico de primeira ordem e as equações são expressas em termos dos parâmetros a serem estimados. O método de estimação utilizado é o filtro estendido de Kalman. O vetor de estado é composto por seis elementos orbitais não singulares e o sétimo é relacionado à força da radiação solar. As observações são azimute, elevação e a distância satélite-estação de controle. As derivadas parciais das observações em relação ao estado são computadas analiticamente, e devido ao fato de se estimar o estado em uma época inicial fixa, o problema de estimação fica reduzido a uma estimação de parâmetros. Os resultados apresentados são referentes às observações do satélite de comunicações da Embratel, Brasilsat A1.

## ABSTRACT

Orbit estimation is a process which involves the state propagation and the estimation method. The objective of this work is to present an autonomous and sequential orbit state estimation for geostationary satellites. The orbit is propagated by a first-order semi-analytical model and the equations of propagation are expressed in terms of the parameters to be estimated. The Extended Kalman Filter is the estimation method used. The state vector is composed by six non-singular orbital elements and one which is related to the solar radiation force. The observations are the azimuth, elevation and range (distance from satellite to the control station). The partial derivatives of the observations with respect to the state are computed analytically, and due to the fact that the state is estimated in a fixed epoch, the estimation problem is reduced to a parameter estimation. The results are referred to the observation data of the first Embratel Communications Satellite: Brasilsat A1.

## ÍNDICE GERAL

	PAG.
CAPÍTULO I .....	1
1.1 - Introdução .....	1
1.2 - Organização do Trabalho .....	5
CAPÍTULO II - Estimação da Órbita .....	9
II.1 - Introdução .....	8
II.2 - Filtro Linear Discreto .....	8
II.3 - Aproximação Linear .....	10
II.4 - Parametrização dos Elementos Orbitais .....	12
II.4.1 - Equações Parametrizadas .....	12
II.4.2 - Elementos Orbitais .....	13
CAPÍTULO III - Propagação da Órbita .....	16
III.1 - Método Semi-Analítico .....	16
III.1.1 - Geopotencial .....	19
III.1.2 - Atração Lunisolar .....	31
III.1.3 - Radiação Solar .....	44
III.2 - Comparação das Amplitudes dos Termos Periódicos .....	51
III.3 - Forma Final das Equações .....	55

(continua)

ÍNDICE GERAL (continuação)

	PAG.
CAPÍTULO IV - Análise dos Resultados.....	105
IV.1 - Resultados.....	57
IV.1.1 - Propagação da Órbita.....	57
IV.1.2 - Derivadas Parciais.....	74
IV.1.3 - Estimacão da Órbita.....	74
IV.1.4 - Estimacão da Órbita Pós-Manobra.....	83
IV.2 - Conclusões.....	90
CAPÍTULO V - Conclusões Finais.....	92
APÊNDICE I - Derivada Parcial do Vetor Observacão em relacão ao Vetor de variáveis Paramétricas....	94
APÊNDICE II - Equacões Simplificadas de Lagrange.....	105
APÊNDICE III - Estrutura do "Software" de Estimacão.....	110
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	113



## ÍNDICE DAS TABELAS

	PAG.
CAPÍTULO III	
III.1 - Variáveis/Definição .....	17
III.2 - Vetor Deriva .....	52
III.3 - Vetor Excentricidade .....	53
III.4 - Vetor Inclinação .....	54
CAPÍTULO IV	
IV.1A - Vetor Deriva .....	59
IV.1B - Vetor Excentricidade .....	59
IV.1C - Vetor Inclinação .....	59
IV.2B - Propagação Semi-analítica .....	61
IV.2B - Propagação Numérica .....	62
IV.3 - Diferença entre os Elementos .....	68
IV.4 - Derivadas Parciais .....	74
IV.5 - Observado-Calculado .....	77
IV.6 - Vetor Estado .....	81
IV.7 - Observado-Calculado (Pós Manobra) .....	84
IV.8 - Vetor Estado Pós Manobra .....	88

## ÍNDICE DAS FIGURAS

	PAG.
<b>CAPÍTULO III</b>	
III - Atração Luni-Solar .....	31
<b>CAPÍTULO IV</b>	
IV.1 - Deriva (d) .....	63
IV.2 - Longitude Média (l) .....	63
IV.3 - Excentricidade ( $e_x$ ) .....	64
IV.4 - Excentricidade ( $e_y$ ) .....	64
IV.5 - Inclinação ( $i_x$ ) .....	65
IV.6 - Inclinação ( $i_y$ ) .....	65
IV.7 - Azimute (Az) .....	66
IV.8 - Elevação (El) .....	66
IV.9 - Distância (Ds) .....	67
IV.10 - Semi-Eixo Maior (a) .....	67
IV.1' - Delta d .....	69
IV.2' - Delta l .....	69
IV.3' - Delta $e_x$ .....	70
IV.4' - Delta $e_y$ .....	70
IV.5' - Delta $i_x$ .....	71
IV.6' - Delta $i_y$ .....	71

(continua)

## ÍNDICE DAS FIGURAS (continuação)

	PAG.
IV.7' - Delta Az.....	72
IV.8' - Delta EL.....	72
IV.9' - Delta Ds.....	73
IV.10' - Delta a.....	73
IV.11 - Azimute (O-C).....	79
IV.12 - Elevação (O-C).....	79
IV.13 - Distância (O-C).....	80
IV.14 - Azimute (O-C) - Mín.Quadrados.....	82
IV.15 - Elevação (O-C) - Mín.Quadrados.....	82
IV.16 - Distância (O-C) - Mín.Quadrados.....	82
IV.11' - Azimute (O-C) - Pós Manobra.....	86
IV.12' - Elevação (O-C) - Pós Manobra.....	86
IV.13' - Distância (O-C) - Pós Manobra.....	87
IV.14' - Azimute (O-C)-Pós Manobra-Mín.Quadrados.....	89
IV.15' - Elevação (O-C)-Pós Manobra-Mín.Quadrados.....	89
IV.16' - Distância (O-C)-Pós Manobra-Mín.Quadrados.....	89

# CAPÍTULO I

## I.1 - Introdução

Para se determinar o "estado" de um sistema são feitas observações através de instrumentos medidores, relacionadas direta ou indiretamente com este "estado". Na maioria dos casos estas observações são "contaminadas", após eliminados os "biases", com um ruído branco causado por componentes eletromecânicos dos instrumentos. O problema de determinação do "estado" através destas medidas é chamado de Estimação de Estado.

A determinação de uma órbita, representada por um "estado" chamado vetor de estado (que pode ser, por exemplo, posição e velocidade), é um processo que envolve o modelo de sua propagação e o método de estimação. Trata-se da resolução de um sistema dinâmico não linear, relacionando vetor de estado e as observações. Assim, a órbita pode ser determinada através da combinação de diferentes modelos de propagação e métodos de estimação. A escolha de uma determinada combinação é função dos objetivos que se deseja atingir.

Este trabalho tem como objetivo a determinação de órbitas de satélites artificiais geostacionários em tempo real, de maneira autônoma e com rapidez no processamento computacional. Este tipo de determinação traz, como consequência imediata, a possibilidade de avaliação de uma manobra após poucas horas de observação e viabiliza, a médio prazo, o processo de determinação de órbita e atitude a bordo dos satélites (e.g. Tapley et al, 1981), face aos avanços tecnológicos na área de microprocessadores (e.g. Kenneth, 1985).

Apesar das raízes dos estudos, diretos ou indiretos, sobre órbitas de satélites artificiais se encontrarem nos dois últimos séculos, a maioria deles é realizada a partir da década de 60 (Shiriwastava, 1978). No que diz respeito às equações do movimento é possível citar trabalhos como os de Blitzer (1965), Kaula (1967), Allan (1963), Kozai (1973), Ferraz-Mello (1972), Riabov (1971), Chebotarev (1967), Marchal (1975) entre outros, que abordam os efeitos das perturbações sobre a órbita tomadas separadamente ou em conjunto. As perturbações

preponderantes em uma órbita geostacionária, são devidas à não uniformidade do geopotencial (que faz com que os satélites geossíncronos exibam características ressonantes), à atração luni-solar e à radiação solar. Basicamente, as perturbações no plano orbital são devidas ao campo gravitacional e à radiação solar, enquanto que o Sol e a Lua produzem perturbações fora do plano. O Sol e a Lua provocam uma variação de longo período na inclinação e nodo. A radiação solar causa uma variação anual na excentricidade. Variações de longo período no semi-eixo maior e na longitude são causadas pela forma elíptica do equador. E finalmente, o achatamento da Terra e a atração luni-solar modificam o raio síncrono de uma órbita geostacionária.

Em 1978, Kamel desenvolveu um modelo de propagação analítico considerando os efeitos do geopotencial e da atração lunisolar em variáveis não singulares. As amplitudes dos termos periódicos são obtidas através de um programa computacional que faz as "manipulações" algébricas. Os efeitos do geopotencial são representados pelos harmônicos zonais e tesserais até os coeficientes  $J_{33}$ . O movimento da Lua é representado pela teoria lunar de HillBrown com coeficientes até  $10^{-3}$  radianos. O movimento do Sol é descrito por expansão da órbita elíptica considerando termos até  $10^{-4}$  radianos, e os elementos orbitais são determinados por um sistema hamiltoniano. Este modelo foi completado por seu autor em 1981, com a introdução da perturbação causada pela radiação solar, na qual é ignorado o efeito do eclipse do Sol pela Terra, uma vez que a sombra atinge um intervalo máximo diário de 72 minutos duas vezes por ano nos equinócios, representando um total menor que 5% de sombra total durante o ano. Este modelo é uma excelente ferramenta, uma vez que, requerendo pouco tempo computacional, pode dar uma visão de propagação da órbita para grandes intervalos e sua precisão pode ser comparada à dos bons modelos de integração numérica, para curtos intervalos de tempo.

Cot (1981), partindo das equações simplificadas de Lagrange (apêndice II) nas variáveis não singulares (longitude, semi-eixo maior/deriva, componentes dos vetores excentricidade e inclinação), desenvolveu uma integração semi-analítica de primeira ordem da órbita geostacionária, obtendo equações de evolução no tempo de maneira parametrizada a partir de quaisquer condições iniciais. É um modelo

desenvolvido nas vizinhanças de um semi-eixo síncrono de referência e da longitude nominal do satélite. Para a evolução dos componentes do vetor excentricidade, os cálculos desenvolvidos consideram até a ordem um na excentricidade e a ordem zero na inclinação e para o vetor inclinação, ordem um na inclinação e zero na excentricidade. Na evolução da longitude média e do semi-eixo maior são consideradas a ordem zero na inclinação e excentricidade. São obtidos termos seculares, de longo e médio períodos e alguns de curtos períodos preponderantes, os quais são consistentes com os obtidos por outros autores como Balsam e Anzel (1969), Legendre (1981) e Kamel (1978). Este modelo, acrescido de outros termos de curtos períodos obtidos pelos autores citados acima, juntamente com um método de estimação que considere os erros provenientes dos modelos de propagação da órbita suficiente quando o objetivo é o controle de satélites geoestacionários, objetivo que passa necessariamente pela determinação da órbita. Assim, considerando-se que a propagação da órbita é válida para intervalos de, no mínimo, 24 horas (que é aproximadamente o período de revolução do satélite em torno do centro da Terra), que o processo computacional é bastante rápido, e que as equações estão expressas na forma parametrizada nas variáveis não singulares, o modelo em questão é escolhido para o presente trabalho.

O problema de estimar o estado de um sistema dinâmico a partir de observações começa há dois séculos quando Gauss, interessado na determinação dos elementos orbitais de um corpo celeste a partir de um conjunto de observações, desenvolve a técnica de estimação hoje conhecida como mínimos quadrados. Mais recentemente, os nomes de Wiener e Kalman estão associados aos avanços existentes na teoria de estimação, que encontram vasta aplicação na solução de problemas na área espacial. A característica seqüencial do método de estimação chamado filtro de Kalman (1960), tornando a sua aplicação simples e versátil, aliada ao fato da introdução de um processo de ruído no modelo dinâmico, e a maneira de obtenção da matriz de covariância dos erros, têm feito deste método uma ferramenta fundamental na análise e solução de problemas de estimação linear (e.g. Bierman, 1977). Enquanto o método clássico dos mínimos quadrados envolve o processamento das observações em conjunto, o filtro as processa à medida que elas estejam disponíveis e produz um novo estado estimado assim que chega uma observação, possibilitando assim a

estimação em tempo real. O filtro faz ainda a estimação da matriz de covariância dos erros, a qual mede as incertezas no estado estimado. Ao fazer uma linearização em torno de uma trajetória nominal, Schmidh (em um problema de navegação) e Pines (na determinação de uma órbita) demonstram, quase simultaneamente em 1962, que o filtro de Kalman pode ser aplicado a problemas de determinação em que o vetor de estado e as observações são expressos em equações não lineares. Esta linearização sendo feita em torno de trajetórias estimadas, que garante uma boa aproximação linear, dá origem ao método conhecido como filtro estendido de Kalman (e.g. Jaswinski, 1970).

A determinação de uma órbita é um problema não linear onde, na maioria dos casos, as equações envolvendo vetor de estado e observações são não lineares. Na presente tese, face aos objetivos enunciados anteriormente, opta-se pelo filtro estendido de Kalman. Ao utilizar este método para determinar uma órbita, é preciso definir o vetor de estado a ser utilizado para a estimação, encontrar sua relação com as observações consideradas, e escolher a maneira (analítica ou numérica) de calcular as derivadas parciais do estado com as observações. Aplicações deste método, para o cálculo de órbita e de atitude, têm sido feitas recentemente com diferentes escolhas de vetor estado, observações e derivadas parciais. É possível citar aplicações, como a feita na Telesat-Canada (Kes et al, 1980) para controle de seus satélites de comunicações, na qual o vetor estado é composto por nove elementos (componentes dos vetores posição e velocidade, os "biases" das antenas e a força da radiação solar). Outra muito interessante foi desenvolvida no CNES-França (Belon, 1983) em que o vetor estado é formado, além dos componentes dos vetores posição e velocidade, por três componentes da aceleração devida a disparos de jatos (para combustível líquido) em apogeu de órbitas de transferência. Pode ser também citado um trabalho (Rogers, 1971) que considera a força de arrasto, no caso de satélites de baixa altitude, como um estado a ser estimado.

Na presente tese, o vetor estado escolhido é constituído por um vetor de parâmetros (Rios Neto e Canesin da Silva, 1983) correspondentes às condições iniciais em uma época  $t_0$ . Trabalhos nesta linha têm sido realizados (de Paiva, 1988) para satélites de baixa altitude. No presente trabalho é escolhido um tipo de vetor de

estado, que faz com que a matriz de transição de estado seja igual à identidade, e calculam-se as derivadas parciais das observações analiticamente (apêndice I). As observações utilizadas são referentes ao satélite de comunicações Brasilsat A1 da Embratel, e são compostas pelo azimute, elevação e distância (satélite - estação de controle). No modelo de trabalho adotado no estimador, os parâmetros do vetor estado são as componentes dos vetores deriva, excentricidade e inclinação e a razão da área transversal da superfície na qual incidem os raios solares sobre a massa do satélite. O sétimo parâmetro é escolhido em função de ser a massa determinada por processos indiretos de medida e pelo fato da área transversal apresentar variações sazonais. Conseqüentemente, torna-se viável a determinação da variação da força da radiação solar.

O método de Integração numérica utilizado para a comparação com o semi-analítico é o de Encke, no qual são integradas as diferenças entre as equações do movimento perturbado e as da órbita dos dois corpos tomada como referência. A solução é inicializada pelo método de Gill, o qual é uma fórmula de Runge-Kutta de 4a. ordem que minimiza os erros. O propagador-corretor é o de Hamming/Milne, que muda automaticamente o tamanho do passo, conforme descrito por Shallon (1983). As órbitas obtidas via filtro de Kalman são comparadas com as estimadas pelo método de mínimos quadrados.

## 1.2 Organização do Trabalho

O capítulo II expõe o método de estimação pelo filtro estendido de Kalman, abordando o modelo dinâmico linear, e a obtenção da solução no caso do sistema não linear. Neste capítulo encontram-se também as variáveis orbitais escolhidas e a justificativa da escolha, assim como a forma das equações parametrizadas e a sua adequação às variáveis orbitais utilizadas.

É no capítulo III que se encontra o modelo de propagação semi-analítico para os elementos orbitais não singulares. São apresentados os potenciais perturbadores, as equações simplificadas de Lagrange e os termos preponderantes em amplitude/frequência das equações de propagação dos elementos orbitais considerados.



O capítulo IV trata dos testes realizados e da análise dos resultados. O modelo semi-analítico de propagação da órbita é comparado com o método de integração numérica de Encke, para testar sua validade em um intervalo de tempo, no mínimo, igual ao período de revolução do satélite em torno do centro de massa da Terra. As derivadas parciais das observações em relação ao vetor estado, que são calculadas por meios analíticos, são apresentadas em termos de valores mínimos e máximos atingidos. Comparações são feitas entre as órbitas obtidas pelo método de estimação de Kalman e a obtida via mínimos quadrados. E por fim é observada a resposta dada pelo método de estimação utilizado, logo após a execução de uma manobra, tomando como informação a priori a órbita prevista ou planejada pós-manobra.

O Apêndice I traz a seqüência de cálculos para a dedução das derivadas parciais das observações em relação ao vetor de estado.

No Apêndice II são obtidas as equações de Lagrange nas variáveis não singulares. As equações são simplificadas a partir da consideração da ordem um na excentricidade e inclinação.

A estrutura do programa desenvolvido é mostrada no Apêndice III com a descrição dos módulos envolvidos.

## CAPÍTULO II - Estimação da Órbita

"In modeling any physical process or device, be it as simple as a pendulum or as sophisticated as a spacecraft guidance and control system, the observer proceeds by delineating the variables describing the process and then connecting them via certain causal relationships or physical laws. He then simulates his model to determine how well it can predict the physical process. At this point he may, if he is willing, remodel the process in order to obtain better predictability. He may or may not succeed. If he repeats this process many times, he will reach a point where further modeling does not improve the prediction. This may be because there are actually unpredictable fluctuations in the process for which no causal relationship exist, or because he has reached the "NOISE LEVEL". At this point, if the observer is ambitious, he might attempt to determine the statistics of the noise (its probability law) by repeating experimentation with the process or device and statistical testing".

Jazwinski

## CAPÍTULO II - Estimação da Órbita

### II.1 - Introdução

Neste capítulo é descrito o método utilizado para estimação da órbita. São apresentadas as equações gerais para o filtro de Kalman linear discreto, a aproximação feita para o caso onde tanto o vetor estado quanto o vetor observação são não lineares e a forma parametrizada das equações de propagação dos elementos orbitais utilizadas.

### II.2 - Filtro Linear Discreto

A solução de um sistema dinâmico linear envolvendo vetor de estado e observações discretizadas no tempo é chamado de filtro linear discreto (Jazwinski, 1970). Considere-se o sistema dado abaixo:

$$\lambda_{k+1} = \Phi(k+1, k)\lambda_k + \omega_k \quad \dots II.1$$

$$z_k = H_k \lambda_k + v_k \quad \dots II.2$$

onde

$k$  é o instante  $t_k$

$z$  é o vetor observação

$\lambda$  é o vetor estado com dimensão  $n$

$\Phi$  é a matriz de transição do estado do instante  $K$  para o  $K+1$

$H$  é a matriz que relaciona as observações ao estado

$\omega_k$  é uma seqüência gaussiana branca, com média nula satisfazendo a  $E[\omega_k \omega_l^T] = Q(k)\delta_{k,l}$

$v_k$  é uma seqüência de ruído branco associada às medidas, satisfazendo a  $E[v_k v_l^T] = R(k) \delta_{k,l}$

$E$  é a esperança ou expectância matemática

$\delta_{k,l} = 0$  se  $k \neq l$  e  $\delta_{k,l} = 1$  se  $k = l$

São admitidas ainda as hipóteses de que não há correlação entre  $\omega$  e  $v$ ,  $\omega$  e o estado e  $v$  e o estado.

Considere que, para o instante  $t=k+1$ , o vetor de uma estimativa a priori do vetor estado (que pode ser o valor estimado),  $\bar{\lambda}_{k+1}$ , e a matriz de covariância,  $\bar{P}_{k+1}$ , associada a este último, sejam conhecidos, com

$$\bar{P}_k = E[(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)(\lambda_k - \bar{\lambda}_k)^T] \quad \dots II.3$$

O vetor estado estimado  $\hat{\lambda}$  e a matriz de covariância  $\hat{P}$  para o instante  $t = k+1$ , são então dados por

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_{k+1} + K(k+1)[z_{k+1} - H(k+1)\bar{\lambda}_{k+1}] \quad \dots II.4$$

$$\hat{P}_{k+1} = [I - K(k+1)H(k+1)]\bar{P}_{k+1} \quad \dots II.5$$

onde

$$K(k+1) = \bar{P}_{k+1} H^T(k+1) [H(k+1)\bar{P}_{k+1} H^T(k+1) + R(k+1)]^{-1},$$

é o ganho de Kalman

$$\bar{P}_{k+1} = \Phi(k+1, k) \hat{P}_k \Phi(k+1, k)^T + Q(k+1)$$

$$\bar{\lambda}_{k+1} = \Phi(k+1, k) \hat{\lambda}_k \quad \dots II.6$$

### II.3 - Aproximação Linear

A determinação de órbita é um dos muitos exemplos de problemas que são não lineares, tanto na propagação do estado quanto na relação entre estado e observação. Estes problemas são geralmente tratados através de uma prévia linearização (aproximação), onde posteriormente é aplicado o Filtro Linear.

Considere então o modelo de observações não linear

$$Y_k = h(\lambda, k) + v_k \quad \dots II.7$$

e o vetor estado, lembrando que neste trabalho ele é constituído por parâmetros constantes (Rios-Neto, A.; 1983), dado por

$$\lambda_{k+1} = \lambda_k + \omega_k \quad \dots II.8$$

Note que a matriz de transição de estado,  $\Phi(k+1, k)$ , é igual à identidade. Objetivando a linearização, as equações das observações são expandidas em series de Taylor em torno de uma órbita de referência (a informação a priori  $\bar{\lambda}$ ), e somente os termos de primeira ordem são mantidos, assim

$$y_k = h(\bar{\lambda}, k) + \left. \frac{\partial h(\lambda, k)}{\partial \lambda} \right|_{\lambda_k = \bar{\lambda}_k} (\lambda_k - \bar{\lambda}_k) + v_k$$

Reescrevendo esta equação

$$y_k = h(\bar{\lambda}, k) + H(\bar{\lambda}, k) \Delta \lambda + v_k$$

onde

$H(\bar{\lambda}, k)$  é a matriz das derivadas parciais do vetor observação com o estado no instante  $k$ .

e fazendo-se

$$\tilde{z}_k = y(k) - h(\bar{\lambda}, k) = H(\bar{\lambda}, k) \Delta \lambda + v_k$$

com

$$\tilde{z}_k \equiv z_k + H(\bar{\lambda}, k) \bar{\lambda}_k$$

tem-se que

$$z_k = H(\bar{\lambda}, k) \lambda_k + v_k \quad \dots 11.9$$

Pode-se observar que a forma da equação acima é igual à equação 11.2, com diferentes interpretações para a variável  $z$ . No primeiro caso (equação 11.2),  $z$  representa as observações realmente e no segundo, são chamadas pseudo-observações, uma vez que não estão diretamente relacionadas com as observações.

Aplicando-se pois o formalismo do filtro linear à equação 11.9, mais especificamente, substituindo esta última na equação 11.4 em  $k=k+1$ , tem-se

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_{k+1} + K(k+1) [\tilde{z}_{k+1}]$$

e, finalmente

$$\hat{\lambda}_{k+1} = \bar{\lambda}_{k+1} + K(k+1) [y_{k+1} - h(\bar{\lambda}_{k+1}, k+1)] \quad \dots 11.10$$

Assim, com a matriz de transição do estado igual à identidade, as equações de propagação, II.6, são simplificadas da maneira que se segue

$$\bar{P}_{k+1} = \hat{P}_k + Q(k+1)$$

$$\bar{\lambda}_{k+1} = \hat{\lambda}_k \quad \dots II.11$$

## II.4 - Parametrização dos Elementos Orbitais

### II.4.1 - Equações Parametrizadas

A escolha das formas parametrizadas adequadas é feita a partir da definição do modelo de propagação, que neste caso é semi-analítico. O vetor estado  $\lambda$ , a ser estimado, é formado por parâmetros que, por sua vez, compõem a forma matemática dos elementos orbitais a serem utilizadas (Rios-Neto, A. e Canesin da Silva, W. 1983). Estes últimos são definidos genericamente em função do tempo através de

$$E_j(t) = E_{j0} + E_{j1}t + E_{j2}t^2 + \sum_{i=3}^{i=n_p} A_{ji} \sin(B_{ji}t + C_{ji}) \quad \dots II.12$$

onde

$j = 1, \dots, 6$  define cada elemento orbital

$E_{j0}$  é o termo constante

$E_{j1}, E_{j2}$  são os termos seculares

$A_{ji}, B_{ji}, C_{ji}$  são as amplitudes, frequências e constantes dos termos periódicos

$n_p$  é o número de termos periódicos

A dimensão do vetor  $\lambda$  é  $(7 \times 1)$ , cujas componentes são as condições iniciais dos parâmetros  $E$ , e mais um termo que compõe uma das amplitudes das funções  $J$  periódicas. Estas componentes serão detalhadas no capítulo III. Portanto, pode-se escrever

$$\lambda_k = \{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_7}\}^T$$

O vetor observação  $y$  tem dimensão  $(3 \times 1)$  e é formado pelas medidas de azimute, elevação e distância (satélite - estação de controle) ou seja

$$y_k = \{y_{k_1}, y_{k_2}, y_{k_3}\}^T$$

Assim, a equação das observações pode ser escrita como

$$y_k = h(\{\lambda_{k_1}, \dots, \lambda_{k_7}\}^T, k) + v_k \quad \dots II.13$$

que relaciona os parâmetros a serem estimados, diretamente com as observações. A determinação analítica das relações funcionais entre as observações e o estado,  $h$  e  $H$ , são descritas no apêndice I.

#### II.4.2 - Elementos Orbitais

Em uma órbita geostacionária, onde a excentricidade e a inclinação atingem valores muito pequenos, é necessário fazer uso de variáveis tais que não ocorra indeterminação matemática. Desta maneira, os elementos orbitais escolhidos são os não singulares vetores deriva ( $\bar{d}^{\rightarrow}$ ), excentricidade ( $\bar{e}^{\rightarrow}$ ) e inclinação ( $\bar{i}^{\rightarrow}$ ), definidos da forma que se segue



Vetor Deriva -  $d$  ( $l$ ,  $d$ )

$$\begin{cases} l = \Pi + M - AHG, & \dots II.14 \\ d = \frac{3n_s}{2} \left( t - \frac{a}{a_s} \right) & \dots II.14' \end{cases}$$

Vetor Excentricidade -  $\vec{e}$  ( $e_x$ ,  $e_y$ )

$$e_x = e \cos \Pi \quad \dots II.15$$

$$e_y = e \sin \Pi \quad \dots II.15'$$

Vetor Inclinação -  $\vec{i}$  ( $i_x$ ,  $i_y$ )

$$i_x = i \cos \Omega \quad \dots II.16$$

$$i_y = i \sin \Omega \quad \dots II.16'$$

onde

$l$  é a longitude média

$d$  é a deriva, definida como o deslocamento em longitude no intervalo de um dia

$\Omega$  é a ascensão reta do nodo ascendente

$\omega$  é o argumento do perigeu

$M$  é a anomalia média

$AHG$  é o ângulo horário de Greenwich

$e$  é a excentricidade

$i$  é a inclinação

$a$  é o semi-eixo maior

$a_s$  é o semi-eixo maior síncrono

$n_s$  é o movimento médio síncrono

$$\Pi = \Omega + \omega$$

O passo seguinte é expressar os elementos orbitais acima na forma parametrizada da equação 11.3, a qual fornece a propagação do elemento no tempo; isto é visto no capítulo que se segue.

## CAPÍTULO III - Propagação da Órbita

Neste capítulo é sumarizado o método semi-analítico de propagação da órbita geostacionária de Cot (1984) obtendo-se os principais termos componentes das equações de evolução dos elementos não singulares com o tempo. Os valores numéricos das amplitudes dos termos das equações são comparados com aqueles obtidos por Balsam (1969), Legendre (1980) e Kamel (1981), onde são analisados os efeitos preponderantes das perturbações sobre os elementos orbitais, visando a escolha dos termos que efetivamente formarão as equações de propagação.

### III.1 - Método Semi-Analítico

O desenvolvimento das equações é feito nas variáveis semi-eixo maior/deriva, longitude média e componentes do vetor excentricidade e inclinação, nas vizinhanças do semi-eixo maior síncrono e da longitude de controle do satélite.

Para o estudo da propagação da inclinação, os desenvolvimentos consideram a ordem zero na excentricidade e até a primeira ordem na inclinação. O contrário é considerado para a propagação da excentricidade. Para a longitude média e semi-eixo maior a ordem zero é considerada na excentricidade e na inclinação.

A tabela III.1 apresenta a notação e terminologia para as variáveis utilizadas ao longo deste capítulo.

Tabela III.1 - Variáveis/Definição

Variável	Definição
$m_t$	Massa da Terra
$\mu$	Constante gravitacional da Terra ( $398600.607 \text{Km}^3 \text{s}^{-2}$ )
$\omega_t$	Velocidade de rotação da Terra
$r_t$	Raio equatorial terrestre
$P_l$	Polinômios de Legendre de grau $l$
$P_{lm}$	Polinômios associados de Legendre
$C_{l0} = -J_l$	Harmônicos zonais
$C_{lm}, S_{lm}$	Harmônicos tesserais
$r, \lambda, \psi$	Coordenadas geocêntricas do satélite (distância, longitude, latitude)
$\alpha$	Asc. reta do satélite
$m_s$	Massa do satélite
$a_s$	Semi eixo síncrono de referência
$n_s$	Movimento médio síncrono do satélite $n_s = \left(\frac{\mu}{a_s^3}\right)^{\frac{1}{2}}$
$l_s$	Longitude de controle
$n_l$	Movimento médio da Lua
$a_l$	Semi-eixo médio da Lua

(continua)

Tabela III.1 - Variáveis/Definição (continuação)

Variável	Definição
$i_{\ell}$	Inclinação da órbita lunar $18.3^{\circ} \leq i_{\ell} \leq 28^{\circ}.59$
$m_{\ell}$	Massa da Lua
$K_{\ell}$	$K_{\ell} = \frac{n_{\ell}^2}{n_s} \left( \frac{m_{\ell}}{m_{\ell} + m_t} \right)$
$i_{\ell e}$	Inclinação da Lua sobre a eclíptica
$n_{\star}$	Movimento médio da órbita aparente do Sol
$e_{\star}$	Excentricidade da órbita aparente do Sol
$i_{\star}$	Inclinação da órbita aparente do Sol
$m_{\star}$	Massa do Sol
$K_{\star}$	$K_{\star} = \frac{n_{\star}^2 \cdot m_{\star}}{n_s} \left( \frac{m_{\star}}{m_{\star} + m_t} \right)$
$\Omega_{\ell e}$	Longitude do nodo ascendente da órbita da Lua sobre a eclíptica
$i_{\ell e}$	Inclinação da órbita da Lua sobre a eclíptica
$P_{\star}$	Pressão de radiação solar por unidade de superfície
$L_{\star}$	Fluxo de radiação solar
$R$	Potencial perturbador

### III.1.1 - Geopotencial

O geopotencial tem seus efeitos perturbadores preponderantes no vetor deriva, experimentando variações seculares e de médios e curtos períodos. Em seguida vem a excentricidade apresentando variações significativas de curtos períodos e por fim a inclinação que apresenta efeitos de curtos períodos.

Os harmônicos tesserais dão origem ao principal efeito perturbador na longitude e na deriva. Como o período orbital de um satélite geoestacionário é próximo do de rotação da Terra, o fenômeno da ressonância está presente fazendo com que o plano longitude-deriva apresente diferentes trajetórias em função da longitude de controle do satélite. As trajetórias são hiperbólicas ou elípticas se a longitude estiver "próxima" de pontos de equilíbrio instável ou estável respectivamente; e aproximadamente parabólicas se a longitude estiver "suficientemente afastada" de um ponto de equilíbrio. Os pontos de equilíbrio estável estão nas longitudes de  $106^\circ$  e  $284^\circ$  oeste e os instáveis em  $11^\circ$  e  $196^\circ$  oeste. O harmônico zonal de grau 2 ( $J_2$ ) faz com que o semi-eixo síncrono seja aumentado em aproximadamente 2 Km.

Na excentricidade o  $J_2$  provoca variações de curto período com amplitudes em torno de  $3.7 \times 10^{-5}$  enquanto que os harmônicos zonais de graus superiores e os tesserais provocam efeitos insignificantes.

#### A - Potencial Perturbador

Considere um satélite geoestacionário com coordenadas geocêntricas  $S(r, \lambda, \psi)$ . O potencial gerado pela Terra no ponto  $S$  é dado por:

$$U(r, \lambda, \psi) = \frac{\mu}{r} + R(r, \lambda, \psi)$$

onde

$R$  é o potencial perturbador

$R(r, \lambda, \psi)$  é dado por

$$R(r, \lambda, \psi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l R_{lm}(r, \lambda, \psi) \quad \dots III.1$$

com

$$R_{lm}(r, \lambda, \psi) = \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^l P_{lm}(\text{sen } \psi) (C_{lm} \cos m\lambda + S_{lm} \text{sen } m\lambda)$$

onde

$P_l, P_{lm}$  polinômio e funções associadas de Legendre

$C_{l0} = -J_l$  são os harmônicos zonais (funções da latitude apenas)

$C_{lm}, S_{lm}$  são os harmônicos tesserais (funções da longitude e latitude)

Fazendo-se

$$J_{lm} = (C_{lm}^2 + S_{lm}^2)^{\frac{1}{2}}; K_{l0} = -J_{l0}$$

e

$$\lambda_{lm} = \frac{1}{m} \text{arctg} \left( \frac{S_{lm}}{C_{lm}} \right)$$

pode-se escrever

$$R(r, \lambda, \psi) = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^l J_{lm} P_{lm}(\sin \psi) \cos m(\lambda - \lambda_{lm}) \quad \dots III.2$$

Considerando que  $\sin(\psi) = O(i)$ , onde  $i$  é a inclinação da órbita do satélite, e calculando os polinômios de Legendre até o grau 3, tem-se

$$\begin{aligned} R(r, \lambda) = & \frac{1}{2} \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^2 J_2 + \frac{3\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^2 J_{22} \cos 2(\lambda - \lambda_{22}) \\ & - \frac{3}{2} \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^3 J_{31} \cos(\lambda - \lambda_{31}) \\ & + 15 \frac{\mu}{r} \left( \frac{r_t}{r} \right)^3 J_{33} \cos 3(\lambda - \lambda_{33}) \quad \dots III.3 \end{aligned}$$

## B - Vetor Deriva

As equações aproximadas de Lagrange (ver apêndice II) são dadas por

$$\frac{dl}{dt} = n - \omega_t - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}(a, l)$$

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l}(a, l)$$

Um satélite em órbita geoestacionária tem seu movimento controlado de tal maneira que ele fica sempre próximo a uma determinada longitude, as equações de Lagrange são linearizadas em torno da longitude de controle ( $l_s$ ) e do semi-eixo síncrono ( $a_s$ ). Assim, escrevendo-se



$$l = l_s + \epsilon$$

$$a = a_s \left(1 - \frac{2d}{3n_s}\right) = a_s(1 + \eta)$$

tem-se para estas variáveis

$$\frac{d\epsilon}{dt} = \frac{dl}{dt} = n_s \omega_t - \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R}{\partial a}(a_s, l_s) - \frac{3}{2} n_s n$$

...III.4

$$\frac{d\eta}{dt} = \frac{da}{a_s dt} = \frac{2}{n_s a_s^2} \frac{\partial R}{\partial l}(a_s, l_s) + \frac{2}{n_s a_s^2} \frac{\partial^2 R}{\partial l^2}(a_s, l_s) \epsilon$$

### B.1 - Efeito Constante

O semi-eixo síncrono de referência é aquele para o qual

$$n_s \omega_t - \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R}{\partial a}(a_s, l_s) = 0$$

linearizando-se esta última equação em torno do semi-eixo

Kepleriano ( $a_{sk}$ ) para o qual  $a_{sk} = \left(\frac{\mu}{\omega_t^2}\right)^{\frac{1}{3}}$  e

$a_s = a_{sk}(1 + \eta)$ , tem-se

$$a_s = a_{sk} - \frac{4}{3} \frac{a_{sk}^3}{\mu} \frac{\partial R}{\partial a}(a_{sk}, l_s)$$

Desenvolvendo-se o potencial perturbador  $R$  considerando a ordem zero na excentricidade e inclinação de tal maneira

que

$$r \approx a + o(e)$$

$$\lambda = l_s + o(e)$$

encontra-se para  $a_s$

$$\begin{aligned} a_s = a_{sk} + 2a_{sk} \left( \frac{r_t}{a_{sk}} \right)^2 J_2 + 12a_{sk} \left( \frac{r_t}{a_{sk}} \right)^2 J_{21} \cos 2(l_s - \lambda_{22}) \\ - 8a_{sk} \left( \frac{r_t}{a_{sk}} \right)^3 J_{31} \cos (l_s - \lambda_{31}) + 2a_s \left( \frac{r_t}{a_{sk}} \right)^3 J_{33} \cos 3(l_s - \lambda_{33}) \end{aligned} \quad \dots III.5$$

O termo preponderante em  $a_s$  é devido ao  $J_2$  com  $\delta a = a_s - a_{sk} = 2.089 \text{ Km}$ .

## B.2 - Efeito Secular

As equações de Lagrange para o semi-eixo maior síncrono de referência ( $n_s$ ), escritas em termos da deriva e da longitude, com  $d = dl/dt$ , são

$$\dot{l} = d$$

$$\dot{d} = -\frac{3}{a_s^2} \frac{\partial R}{\partial l}(a_s, l_s) - \frac{3}{a_s^2} \frac{\partial^2 R}{\partial l^2}(a_s, l_s) \cdot (l - l_s)$$

$\dot{d}$  pode ser reescrita como

$$\dot{d} = 3n_s^2[G_1 + G_2(l - l_s)] \quad \dots III.6$$

com

$$G_1 = 6 \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^2 J_{22} \operatorname{sen}2(l_s - \lambda_{22}) - \frac{3}{2} \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^3 J_{31} \operatorname{sen}(l_s - \lambda_{31}) \\ + 45 \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^3 J_{33} \operatorname{sen}3(l_s - \lambda_{33})$$

$$G_2 = 12 \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^2 J_{22} \operatorname{cos}2(l_s - \lambda_{22}) - \frac{3}{2} \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^3 J_{31} \operatorname{cos}(l_s - \lambda_{31}) \\ + 135 \left(\frac{r_t}{a_s}\right)^3 J_{33} \operatorname{cos}3(l_s - \lambda_{33})$$

dados em função da longitude de controle do satélite ( $l_s$ ).

O sistema III.6 é resolvido para os casos seguintes

$$1) G_1 \rightarrow 0 \text{ e } G_2 \gg G_1 > 0$$

Neste caso a solução é dada por

$$d(t) = d_0 \operatorname{ch}(\omega t) + \frac{3n_s^2 (G_2(l_0 - l_s) + G_1)}{\omega} \operatorname{sh}(\omega t)$$

$$l(t) = l_0 + \frac{d_0}{\omega} \operatorname{sh}(\omega t) + \frac{3n_s^2 (G_2(l_0 - l_s) + G_1)}{\omega^2} [\operatorname{ch}(\omega t) - 1]$$

$$2) G_1 \rightarrow 0 \text{ e } G_2 \ll G_1 < 0$$

A solução é dada por

$$d(t) = d_0 \cos \omega t + \frac{3n_s^2 (G_2(l_0 - l_s) + G_1)}{\omega} \operatorname{sen}(\omega t)$$

$$l(t) = l_0 + \frac{d_0}{\omega} \operatorname{sen} \omega t - \frac{3n_s^2 (G_2(l_0 - l_s) + G_1)}{\omega^2} [\cos(\omega t) - 1]$$

$$3) G_1 \gg G_2(l - l_s)$$

Neste caso a solução será

$$d(t) = d_0 + 3n_s^2 G_1 (t - t_0)$$

$$l(t) = l_0 + d_0 t + \frac{3}{2} n_s^2 G_1 (t - t_0)^2 \quad \dots \text{III.7}$$

O caso 1 demonstra que as trajetórias descritas no plano longitude-deriva são hipérbolas em torno de um ponto de equilíbrio instável. No caso 2, as trajetórias são elipses em torno de um ponto de equilíbrio estável. No caso 3, em que  $G_2$  ou  $G_2(l - l_s)$  é muito pequeno comparado a  $G_1$ , as trajetórias são parabólicas.

### C - Vetor Excentricidade

Reescrevendo as componentes  $R_{lm}$  do potencial na sua forma geral III.1, de maneira que

$$R_{lm} = \frac{\mu}{a} \left(\frac{r}{a}\right)^l \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} J_{lm} P_{lm}(\sin\psi) \cos m(\lambda - \lambda_{lm})$$

e considerando que

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos V} = \frac{a}{(1+e \cos V)} + o(e^2)$$

e

$$V \simeq M + 2e \sin M + o(e^2)$$

tem-se

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \simeq 1 + e(l+1) \cos M + o(e^2)$$

Como

$$\cos M = \cos \alpha \cos(\omega + \Omega) + \sin \alpha \sin(\omega + \Omega)$$

tem-se

$$\left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} = 1 + e_x(l+1) \cos \alpha + e_y(l+1) \sin \alpha + o(e^2)$$

Observando ainda que

$$\lambda = \omega + \Omega + V - AHG = \omega + \Omega + M + 2e \sin M - AHG + o(e^2)$$

tem-se de maneira análoga à anterior que

$$\begin{aligned} \cos m(\lambda - \lambda_{lm}) = & \cos(l_s - \lambda_{lm}) - 2m e_x \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} m(l_s - \lambda_{lm}) \\ & + 2m e_y \operatorname{coss} \alpha \operatorname{sen} m(l_s - \lambda_{lm}) + o(e^2) \end{aligned}$$

Com o potencial perturbador expresso em funções das variáveis  $e_x$  e  $e_y$ ,

$$\begin{aligned} R_{lm} = & \frac{\mu}{a_s} \left( \frac{r_t}{a_s} \right)^l J_{lm} P_{lm}(\operatorname{sen} \psi) \{ \cos m(l_s - \lambda_{lm}) \\ & + e_x [(l+1) \operatorname{coss} \alpha \cos m(l_s - \lambda_{lm}) - 2m \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen} m(l_s - \lambda_{lm})] \\ & + e_y [(l+1) \operatorname{sen} \alpha \cos m(l_s - \lambda_{lm}) + 2m \operatorname{coss} \alpha \operatorname{sen} m(l_s - \lambda_{lm})] \} \end{aligned}$$

...III.8

as equações aproximadas de Lagrange

$$\frac{de_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_y}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_x}$$

são então escritas como

$$\frac{de_x}{dt} = -n_s A \operatorname{sen} \alpha - n_s B \operatorname{coss} \alpha$$

$$\frac{de_y}{dt} = n_s A \operatorname{coss} \alpha - n_s B \operatorname{sen} \alpha$$

...III.9

onde

$$A = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l A_{lm}$$

e

$$B = \sum_{l=2}^{\infty} \sum_{m=0}^l B_{lm}$$

com

$$A_{lm} = (l+1) \left( \frac{r_t}{a_s} \right)^l K_{lm} P_{lm}(\sin \psi) \cos m(l_s - \lambda_{lm})$$

$$B_{lm} = 2m \left( \frac{r_t}{a_s} \right)^l K_{lm} P_{lm}(\sin \psi) \sin m(l_s - \lambda_{lm})$$

cuja a solução geral é dada por

$$e_x(t) = A \cos \alpha - B \sin \alpha$$

$$e_y(t) = A \sin \alpha + B \cos \alpha$$

Limitando-se a solução ao harmônico zonal  $J_2=J_{20}$ , e portanto  $B=0$ , tem-se que a solução, com período igual a 1 dia, é dada por

$$e_x(t) = e_x(t_0) + e_t [\cos \alpha(t) - \cos \alpha(t_0)]$$

$$e_y(t) = e_y(t_0) + e_t [\sin \alpha(t) - \sin \alpha(t_0)]$$

...III.10

com

$$e_t = \frac{3}{2} \left( \frac{r_t}{a_s} \right)^2 J_2 = 3.72 \times 10^{-5}$$

#### D - Vetor Inclinação

Relembrando a forma geral das componentes do potencial terrestre

$$R_{lm} = \frac{\mu}{r} \left( \frac{R_t}{r} \right)^l J_{lm} P_{lm}(\sin \psi) \cos m(\lambda - \lambda_{lm})$$

considere agora as aproximações nas quais

$$r \simeq a + o(e)$$

$$\lambda \simeq l_s + o(e)$$

Assim, o potencial perturbador até o grau 3 se escreve como

$$R = - \frac{\mu}{2a} \left( \frac{R_t}{a} \right)^2 J_2 \cdot \frac{3}{2} (i_x^2 + i_y^2)$$

$$- \frac{3\mu}{2a} \left( \frac{R_t}{a} \right)^3 J_3 (i_x \sin \alpha - i_y \cos \alpha)$$

...III.11



As equações aproximadas de Lagrange

$$\frac{di_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_y}$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_x}$$

têm como soluções para os termos em

a)  $J_2$

$$i_x = ix(to) \cos A_2(t-to) + iy(to) \sin A_2(t-to)$$

$$i_y = iy(to) \cos A_2(t-to) - ix(to) \sin A_2(t-to) \quad \dots III.12$$

$$\text{com } A_2 = \frac{3}{2} n_s \left( \frac{R_t}{a_s} \right)^2 J_2 = 1.34 \times 10^{-2} \text{ graus/dia}$$

b)  $J_3$

$$i_x = A_3(\sin \alpha(t) - \sin \alpha(to))$$

$$i_y = A_3(\cos \alpha(t) - \cos \alpha(to)) \quad \dots III.13$$

$$\text{com } A_3 = \frac{3}{2} \left( \frac{R_t}{a_s} \right)^3 J_3 = 7.54 \times 10^{-7} \text{ graus}$$

### III.1.2 - Atração Luni-Solar

A atração gravitacional do Sol e da Lua tem seu maior efeito perturbador no vetor inclinação seguido da deriva e excentricidade. A variação quase-secular da inclinação, com período de aproximadamente 18.6 anos é a mais importante e, para efeito de controle de satélites geoestacionários, é considerada linear experimentando variações próximas a  $1^\circ$  por ano. Depois desta, a variação de longo período de seis meses com amplitude aproximada de  $0^\circ.023$  é a preponderante, seguida de outras variações menores de médios e curtos períodos.

O vetor deriva sofre efeitos principais de longo período ( $\approx 182$  dias) na longitude com amplitude de  $0^\circ.0186$  e uma perturbação constante na deriva expressa por uma redução de aproximadamente 800 metros no semi-eixo maior síncrono. A deriva experimenta ainda variações preponderantes de meio dia de período com amplitudes correspondentes no semi-eixo maior que variam de 82 a 965 metros.

A excentricidade experimenta variações de médios períodos com amplitudes significativas de  $3.5 \times 10^{-5}$  e  $4 \times 10^{-6}$  com períodos de 27.55 e 9 dias respectivamente, e outras com períodos em torno de um dia e amplitudes de até  $3.7 \times 10^{-5}$ .

#### A - Potencial Perturbador

Considere a figura abaixo

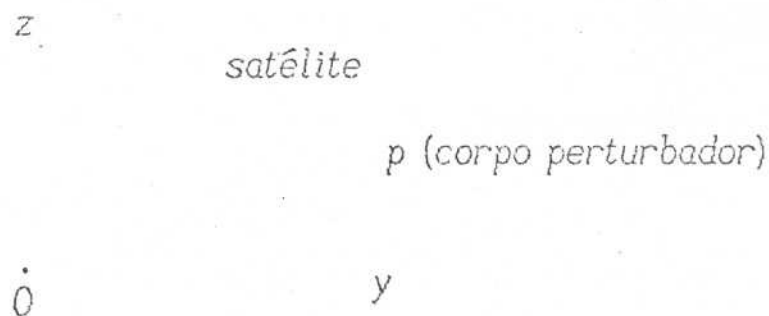


Fig.III - Atração Luni-Solar

O potencial perturbador do corpo  $p$  sobre o satélite é dado por

$$R_p = \mu_p \left( \frac{1}{|\vec{r}_p - \vec{r}|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}_p}{|\vec{r}_p|^3} \right)$$

onde  $\mu_p$  é a constante gravitacional de corpo perturbador  $p$  ( $\mu_p = Gm_p$ )

Escrevendo em termos do polinômio de Legendre

$$R_p = \frac{\mu_p}{r_p} \left[ 1 + \sum_{l=2}^{\infty} \left( \frac{r}{r_p} \right)^l P_l(\cos s) \right] \quad \dots III.14$$

Considerando que as derivadas parciais do primeiro termo da equação acima em relação aos elementos orbitais do satélite são iguais a zero, e observando que

$$G(m_p + m_t) = n_p^2 a_p^2 \quad e \quad \beta_p = \frac{m_p}{m_p + m_t}$$

e ainda limitando-se ao termo de grau 2 nos polinômios de Legendre reescreve-se o potencial perturbador como

$$R_p = n_p^2 \beta_p a_p^2 \left( \frac{r}{a} \right)^2 \left( \frac{a_p}{r_p} \right)^3 P_2 \cos S \quad \dots III.15$$

com o  $\cos S$  definido por

$$\cos S = s_x t_x + s_y t_y + s_z t_z$$

onde

$(s_x, s_y, s_z)$  e  $(t_x, t_y, t_z)$  são os cossenos diretores da direção Terra-satélite e da direção Terra-corpo perturbador respectivamente, dados por

$$s_x = \cos(\omega+V)\cos\Omega - \text{sen}(\omega+V)\text{sen}\Omega \cos i$$

$$s_y = \cos(\omega+V)\text{sen}\Omega + \text{sen}(\omega+V)\cos\Omega \cos i$$

$$s_z = \text{sen}(\omega+V)\text{sen} i$$

e

$$t_x = \cos\lambda_p \cos\Omega_p - \text{sen}\lambda_p \text{sen}\Omega_p \cos i_p$$

$$t_y = \cos\lambda_p \text{sen}\Omega_p + \text{sen}\lambda_p \text{sen}\Omega_p \cos i_p$$

$$t_z = \text{sen}\lambda_p \text{sen} i_p$$

onde

$$\lambda_p = \omega_p + V_p \approx \omega_p + M_p$$

## B - Vetor Inclinação

As equações simplificadas de Lagrange para o vetor inclinação se escrevem

$$\frac{di_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R_p}{\partial i_y}$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R_p}{\partial i_x}$$

Considerando as excentricidades em ordem zero, tal que  $V=M+o(e)$ , e ainda a ordem 1 na inclinação de maneira que  $\text{sen}i=i+o(i^2)$  e  $\text{cos}i=1+o(i^2)$ , pode-se escrever para o cosseno diretor Terra-satélite

$$s_x = \text{cos}\alpha$$

$$s_y = \text{sen}\alpha$$

$$s_z = i_x \text{sen}\alpha - i_y \text{cos}\alpha$$

e para a razão  $\frac{r}{a}$

$$\frac{r}{a} = \frac{1-e^2}{1+e\text{cos}V} \simeq 1+o(e)$$

### B.1 - Variação Secular

As equações diferenciais que descrevem a variação secular do vetor inclinação

$$\frac{di_x}{dt} = -\frac{3}{8} K_e \text{sen}2i_e \text{cos}i_e \text{sen}\Omega_e$$

$$\frac{di_y}{dt} = \frac{3}{8} \text{sen}2i_e (K_e + \text{cos}^2 i_e K_e) + \frac{3}{8} K_e \text{sen}2i_e \text{cos}2i_e \text{cos}\Omega_e$$

têm como soluções

$$i_x(t) = i_x(t_0) - (3.6 \operatorname{sen} \Omega_{\ell}(t-t_0)) \cdot 10^{-4} \quad \dots \text{III.16}$$

$$i_y(t) = i_y(t_0) + (23.4 + 2.7 \cos \Omega_{\ell}(t-t_0)) \cdot 10^{-4}$$

onde

$$K_i = \frac{n_i^2}{n_s} \left( \frac{m_i}{m_i + m_t} \right) \quad \text{com } i \text{ referindo-se ao Sol ou a Lua}$$

$m_t$  = massa da Terra

$i_{\ell e}$  é a inclinação da órbita aparente do Sol

$\Omega_{\ell e}$  é a longitude de nodo ascendente da órbita da Lua sobre a eclíptica. O período de variação é de 6800 dias (18.613 anos), e a equação de variação é dada por

$$\Omega_{\ell e} = (12.11 - 0.052954 T)^{\circ}$$

onde

$T$  é a data em número de dias julianos depois de 1/1/1950.

Assim, a extremidade do vetor inclinação descreve uma reta (considerando períodos pequenos comparados a 18.613 anos) que faz um ângulo  $\beta$  com o eixo  $x$  tal que

$$\cos \beta = \frac{di_y/dt}{\left( \left( \frac{di_x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{di_y}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}}$$

e

$$\text{sen}\beta = \frac{di_y}{dt} / \left( \left( \frac{di_x}{dt} \right)^2 + \left( \frac{di_y}{dt} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

$\beta$  varia entre  $81^{\circ}.1$  e  $98^{\circ}.1$  e a inclinação experimenta variações  $0^{\circ}.756$  e  $0^{\circ}.952$  por ano.

## B.2 - Efeito de Longo Período

As equações diferenciais que descrevem a evolução periódica do vetor inclinação devido ao Sol

$$\frac{di_x}{dt} = \frac{3}{4} K_{\star} \text{sen } i_{\star} \text{sen } 2\lambda_{\star}$$

$$\frac{di_y}{dt} = -\frac{3}{8} K_{\star} \text{sen } 2i_{\star} \cos 2\lambda_{\star}$$

têm como solução

$$i_x(t) = i_x(t_0) - \frac{3K_{\star}}{8n_{\star}} \text{sen } i_{\star} [\cos 2\lambda_{\star}(t) - \cos 2\lambda_{\star}(t_0)]$$

$$i_y(t) = i_y(t_0) - \frac{3K_{\star}}{16n_{\star}} \text{sen } 2i_{\star} [\text{sen } 2\lambda_{\star}(t) - \text{sen } 2\lambda_{\star}(t_0)] \quad \dots \text{III.17}$$

com

$$-\frac{3K_{\star}}{8n_{\star}} \operatorname{sen} i_{\star} = 23^{\circ}.34 \times 10^{-3}$$

e

$$-\frac{3K_{\star}}{16n_{\star}} \operatorname{sen} 2i_{\star} = 21^{\circ}.42 \times 10^{-3}$$

O potencial solar produz um efeito de longo período sobre o vetor inclinação igual a aproximadamente 6 meses. Assim, o vetor inclinação oscila sobre a reta de inclinação  $\beta$ .

### B.3 - Efeito de Médio Período

As equações diferenciais que descrevem a evolução periódica do vetor inclinação devido à Lua

$$\frac{di_x}{dt} = \frac{3}{4} K_{\ell} \cos i_{\ell e} \operatorname{sen} i_{\star} \operatorname{sen} 2\lambda_{\ell}$$

$$\frac{di_y}{dt} = -\frac{3}{8} K_{\ell} \cos^2 i_{\ell e} \operatorname{sen} 2i_{\star} \cos 2\lambda_{\ell}$$

têm como soluções

$$i_x(t) = i_x(t_0) - \frac{3K_{\ell}}{8n_{\ell}} \cos i_{\ell e} \operatorname{sen} i_{\star} [\cos 2\lambda_{\ell}(t) - \cos 2\lambda_{\ell}(t_0)]$$

$$i_y(t) = i_y(t_0) - \frac{3K_{\ell}}{16n_{\ell}} \cos^2 i_{\ell e} \operatorname{sen} 2i_{\star} [\operatorname{sen} 2\lambda_{\ell}(t) - \operatorname{sen} 2\lambda_{\ell}(t_0)]$$

...III.18



onde

$$\frac{3K_{\oplus}}{8n_{\oplus}} \cos i_{\oplus} \sin i_{\star} = 3^{\circ}.808 \times 10^{-3}$$

e

$$\frac{3K_{\oplus}}{16n_{\oplus}} \cos^2 i_{\oplus} \sin 2i_{\star} = 3^{\circ}.48 \times 10^{-3}$$

O potencial lunar provoca na inclinação um efeito de período igual à metade do período da órbita da Lua (13.77 dias).

### C - Vetor Deriva

As equações aproximadas de Lagrange para o vetor deriva se escrevem

$$\frac{dl}{dt} = n - \omega_t - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{3}{a_s^2} \frac{\partial R}{\partial l}$$

Considerando a ordem zero na excentricidade e na inclinação, tal que

$$\sin i = o(i)$$

$$\cos i = 1 + o(i^2)$$

$$V = M + o(e)$$

tem-se para o cosseno diretor Terra-satélite e para a razão  $\frac{r}{a}$

$$s_x = \cos\alpha$$

$$s_y = \text{sen}\alpha$$

$$s_z = 0$$

$$\frac{r}{a} = 1 + o(e)$$

Assim, o potencial perturbador pode ser escrito como

$$R = \frac{n_p^2 \beta}{2} a^2 \left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3 \left[ \frac{3}{2} (1-t_z^2) + \frac{3}{2} (t_x^2 - t_y^2) \cos 2\alpha + 3 t_x t_y \text{sen} 2\alpha \right]$$

### C.1 - Efeito Constante

Conforme visto no item III.1.1 o semi-eixo síncrono de referência é aquele para o qual

$$n_s - \omega_t = \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R}{\partial a} (a_s, l_s) = 0$$

Considerando que

$$\left(\frac{a_p}{r_p}\right)^3 = \frac{1}{(1-e_p^2)^{-3/2}} + \text{termos de curtos períodos}$$

tem-se para  $a_s - a_{sk}$

$$a_s - a_{sk} = \sum_{p=1}^2 -\beta_p a_{sk} \left(\frac{n_p}{\omega_t}\right)^2 (1 - e_p^2)^{-3/2} \left(\frac{2}{3} - \text{sen}^2 i_p\right) \quad \dots \text{III.19}$$

onde  $p$  é referente ao Sol e à Lua

Assim, o Sol e a Lua diminuem o semi-eixo síncrono de referência de

$$\Delta a_{\star} = -.160 \text{ Km}$$

$$\Delta a_{\ell} = -.295 \text{ Km} \quad \text{se } i_{\ell} \text{ máxima}$$

$$\Delta a_{\ell} = -.383 \text{ Km} \quad \text{se } i_{\ell} \text{ mínima}$$

### C.2 - Efeito de Longo e Médio Períodos

Considerando a parte do potencial que contribui para efeitos periódicos e utilizando-a nas equações aproximadas de Lagrange (sem a perturbação quase constante) dadas abaixo

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a}$$

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n_s}{a_s} \frac{da}{dt} = -\frac{3}{a_s^2} \frac{\partial R}{\partial^2}$$

tem-se como solução de longo e médio períodos

$$l(t) = l(t_0) + l_{\star} [\text{sen } 2\lambda_{\star}(t) - \text{sen } 2\lambda_{\star}(t_0)] + l_{\ell} [\text{sen } 2\lambda_{\ell}(t) - \text{sen } 2\lambda_{\ell}(t_0)]$$

...III.20

onde

$$l_{\star} = -\frac{3n_{\star}^2 m_{\star} \operatorname{sen}^2 i_{\star}}{4n_s(m_{\star} + m_t)} = -18^{\circ}.6 \times 10^{-3}$$

$$l_{\ell} = -\frac{3n_{\ell}^2 m_{\ell} \operatorname{sen}^2 i_{\ell}}{4n_s(m_{\ell} + m_t)}$$

com  $l_{\ell}$  variando de

$$l_{\ell} = 1^{\circ}.0 \times 10^{-3} \quad \text{se} \quad i_{\ell} = 18^{\circ}.30$$

a

$$l_{\ell} = 4^{\circ}.4 \times 10^{-3} \quad \text{se} \quad i_{\ell} = 28^{\circ}.59$$

O período da variação de longo período devido ao Sol é de 182.625 dias e o de médio devido à Lua é de 13.77 dias.

### C.3 - Efeito de Curto Período

$$\begin{aligned} d(t) = d(t_0) + d_{\star} [\cos 2(\alpha_s(t) - \lambda_{\star}(t)) - \cos 2(\alpha_s(t_0) - \lambda_{\star}(t_0))] \\ + d_{\ell} [\cos 2(\alpha_s(t) - \alpha_{\ell}(t)) - \cos 2(\alpha_s(t_0) - \alpha_{\ell}(t_0))] \quad \dots \text{III.21} \end{aligned}$$

onde

$$d_{\star} = -\frac{9n_{\star}^2(1 + \cos i_{\star})^2}{16(n_s - n_{\star})} = 5.58 \times 10^{-3} \text{ graus/dia}$$

o que representa 434.55 metros no semi-eixo maior

$$d_{\Omega} = - \frac{9n_{\Omega} m_{\Omega} (1 + \cos i_{\Omega})^2}{16(n_S - n_{\Omega})(m_{\Omega} + m_T)}$$

com  $d_{\Omega}$  variando de

$$d_{\Omega} = 11.83 \times 10^{-3} \text{ graus/dia} \quad \text{se} \quad i_{\Omega} = 28^{\circ}.59$$

a

$$d_{\Omega} = 12.75 \times 10^{-3} \text{ graus/dia} \quad \text{se} \quad i_{\Omega} = 18^{\circ}.30$$

O período da variação devido ao Sol é de .5 dia e o devido à Lua é de .517 dia.

#### D - Vetor Excentricidade

As equações simplificadas de Lagrange para o vetor excentricidade se escrevem

$$\frac{de_x}{dt} = - \frac{1}{na^2} \frac{\partial R_p}{\partial e_y}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R_p}{\partial e_x}$$

com  $R_p$  dado por III.15

Considerando a ordem zero na inclinação e um na excentricidade tal que

$$\sin i = i(i), \quad \cos i = 1+o(i)$$

e

$$V = M+2e \sin M+o(e^2)$$

escreve-se para o cosseno diretor Terra-satélite e para razão  $\frac{r}{a}$

$$s_x = \cos\alpha + e_x(\cos 2\alpha - 1) + e_y \sin 2\alpha$$

$$s_y = \sin\alpha + e_x \sin 2\alpha - e_y(1 + \cos 2\alpha)$$

$$s_z = 0$$

$$\frac{r}{a} = 1 - e \cos M + o(e^2) = 1 - e_x \cos\alpha - e_y \sin\alpha$$

Desta maneira, as equações diferenciais da excentricidade têm como solução de médio período

$$e_x(t) = e_x(t_0) + e_{x(1)}[\cos \lambda_\ell(t) - \cos \lambda_\ell(t_0)] \\ + e_{x(3)}[\cos 3\lambda_\ell(t) - \cos 3\lambda_\ell(t_0)]$$

$$e_y(t) = e_y(t_0) + e_{y(1)}[\sin \lambda_\ell(t) - \sin \lambda_\ell(t_0)] \\ + e_{y(3)}[\sin 3\lambda_\ell(t) - \sin 3\lambda_\ell(t_0)]$$

...III.22

onde

$$e_{x_{(1)}} = \frac{225}{128} \frac{K_{\ell}}{n_{\ell}} \left( \frac{as}{a_{\ell}} \right) \cos i_{\ell e} \sin i_{\ell} (\cos i_{\ell e} \sin 2i_{\star} + 2 \sin i_{\ell e} \cos 2i_{\star})$$

$$e_{y_{(1)}} = \frac{225}{128} \frac{K_{\ell}}{n_{\ell}} \left( \frac{as}{a_{\ell}} \right) \cos i_{\ell e} \cos i_{\ell} \sin i_{\ell} (\sin 2i_{\star} + 2 \sin i_{\ell e})$$

$$e_{x_{(3)}} = -\frac{25}{128} \frac{K_{\ell}}{n_{\ell}} \left( \frac{as}{a_{\ell}} \right) \cos i_{\ell e} \sin i_{\ell} (\cos i_{\ell e} \sin 2i_{\star} + 2 \sin i_{\ell e} \cos 2i_{\star})$$

e

$$e_{y_{(3)}} = -\frac{25}{64} \frac{K_{\ell}}{n_{\ell}} \left( \frac{as}{a_{\ell}} \right) \sin(i_{\ell e} + i_{\star}) \sin i_{\ell}$$

Estas amplitudes variam com a inclinação da Lua

$$\text{se } i_{\ell} = i_{\max} = 28^{\circ}.59 \Rightarrow \begin{matrix} e_{x_1}(\max) = .035 \times 10^{-3} & e_{x_3}(\max) = .00388 \times 10^{-3} \\ e_{y_1}(\max) = .034 \times 10^{-3} & e_{y_3}(\max) = .0044 \times 10^{-3} \end{matrix}$$

$$\text{se } i_{\ell} = i_{\min} = 18^{\circ}.3 \Rightarrow \begin{matrix} e_{x_1}(\min) = .023 \times 10^{-3} & e_{x_3}(\min) = .0026 \times 10^{-3} \\ e_{y_1}(\min) = .023 \times 10^{-3} & e_{y_3}(\min) = .0029 \times 10^{-3} \end{matrix}$$

### III.1.4 - Radiação Solar

#### A - Potencial Perturbador

A aceleração devido à pressão da radiação solar é proveniente de um potencial  $R$ , respeitadas certas hipóteses (e.g. Ferraz-Mello, 1972), tal que

$$R = -\sigma r \cos \Theta \quad \dots \text{III.23}$$

onde

$r$  é a distância Terra-satélite

$\Theta$  é o ângulo entre a direção do Sol e do satélite visto do centro da Terra

$$\sigma = C \frac{S}{m} P_{\star}$$

sendo

$C$  o coeficiente de refletividade do satélite

$S$  a superfície aparente do satélite iluminada pelo Sol

$m$  massa do satélite

$L_{\star}$  é o fluxo de radiação emitido pelo Sol

$P_{\star} = L_{\star}/4\pi D^2$  é a pressão da radiação solar por unidade de superfície

Considerando a ordem um na excentricidade e na inclinação do Sol e que  $l_{\star} = \omega_{\star} + V_{\star} \approx \omega_{\star} + M_{\star} + 2e_y \sin M_{\star} + o(e^2_{\star})$  tem-se para o cosseno diretor Terra-Sol

$$t_x = \cos(\omega_{\star} + M_{\star}) + e_{\star} \cos(2M_{\star} + \omega_{\star}) - e_{\star} \cos \omega_{\star}$$

$$t_y = \cos i_{\star} \sin(\omega_{\star} + M_{\star}) + e_{\star} \cos i_{\star} \sin(2M_{\star} + \omega_{\star}) - e_{\star} \cos i_{\star} \sin \omega_{\star}$$

$$t_z = \sin i_{\star} \sin(\omega_{\star} + M_{\star}) + e_{\star} \sin i_{\star} \sin(2M_{\star} + \omega_{\star}) - e_{\star} \sin i_{\star} \sin \omega_{\star}$$



onde

$e_{\star}$  é a excentricidade da órbita aparente do Sol

### B - Vetor Excentricidade

Considerando agora a primeira ordem na excentricidade e a ordem zero na inclinação, pode-se escrever para o vetor  $\vec{r}$  Terra-Satélite

$$r_x = r \cos(\omega + \Omega + V)$$

$$r_y = r \sin(\omega + \Omega + V)$$

$$r_z = 0$$

com

$$V = M + 2e \sin M + 0(e^2)$$

tal que

$$r = \frac{a(1-e^2)}{1+e \cos V} \simeq a(1-e \cos V) + 0(e^2)$$

Para o vetor unitário Terra-Sol ( $\vec{t}$ ) são consideradas apenas as partes principais, ou seja

$$t_x = \cos \lambda_{\star}$$

$$t_y = .91745 \sin \lambda_{\star}$$

$$t_z = .39785 \sin \lambda_{\star}$$

com  $\lambda_{\star} = \omega_{\star} + M_{\star}$

Lembrando que as equações aproximadas de Lagrange são dadas por

$$\frac{de_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_y}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_x}$$

e observando ainda que  $r \cos \Theta = r_x t_x + r_y t_y + r_z t_z$  e substituindo os valores de  $i_{\star}$  em  $\vec{t}$ , chega-se ao sistema

$$\frac{de_x}{dt} = -1.376 \frac{\sigma}{n_s a_s} \text{sen } \lambda_{\star}$$

$$\frac{de_y}{dt} = 1.5 \frac{\sigma}{n_s a_s} \text{cos } \lambda_{\star} \quad \dots \text{III.24}$$

onde

$\lambda_{\star} = \Omega_{\star} + M_{\star}$  é a longitude média do sol

cuja solução é dada por

$$e_x(t) = e_x(t_0) + e_{x\star} [\text{cos } \lambda_{\star}(t) - \text{cos } \lambda_{\star}(t_0)] \quad \dots \text{III.25}$$

$$e_y(t) = e_y(t_0) + e_{y\star} [\text{sen } \lambda_{\star}(t) - \text{sen } \lambda_{\star}(t_0)]$$

onde

$$e_{x^*} = \frac{1.376}{n_{\star}} \frac{\sigma}{n_s a_s}$$

$$e_{y^*} = \frac{1.5}{n_{\star}} \frac{\sigma}{n_s a_s}$$

A excentricidade descreve ao longo de um ano (365.25 dias) uma elipse com semi-eixo maior e semi-eixo menor iguais às amplitudes dos termos de  $e_y$  e  $e_x$  respectivamente.

### C - Vetor Deriva

A equação de Lagrange para o semi-eixo maior é escrita como

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{n_s a_s} \sigma a_s (t_x \operatorname{sen} \alpha - t_y \operatorname{cos} \alpha)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = 2a_s \frac{\sigma}{n_s a_s} [ &.958725 \operatorname{sen}(\alpha - M_{\star} - \omega_{\star}) \\ &+.041275 \operatorname{sen}(\alpha + M_{\star} + \omega_{\star}) \\ &+.01603 \operatorname{sen}(\alpha - 2M_{\star} + \omega_{\star}) \\ &-.01603 \operatorname{sen}(\alpha - \omega_{\star}) \\ &-.00069 \operatorname{sen}(\alpha + \omega_{\star})] \end{aligned} \quad \dots \text{III.26}$$

Cuja solução apresenta um termo de amplitude da ordem de 49.11m e período próximo a 1 dia.

Reescrevendo a equação de Lagrange para a longitude

$$\frac{dl}{dt} = n - \omega_t - \frac{2}{n_s a_s} \frac{\partial R}{\partial a} (a_s, l_s) - \frac{3}{2} \frac{n_s}{a_s} (a - a_s)$$

focalizando o efeito direto e o induzido pela pressão da radiação solar tem-se

$$\frac{dl}{dt} = \frac{2\sigma}{n_s a_s} (t_x \cos\alpha + t_y \sin\alpha) - \frac{3}{2} \frac{n_s}{a_s} (a - a_s)$$

e conseqüentemente

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} = \frac{2\sigma}{n_s a_s} [ &.958725 \cos(\alpha - M_{\star} - \omega_{\star}) \\ &+.041275 \cos(\alpha + M_{\star} + \omega_{\star}) \\ &+.01603 \cos(\alpha - 2M_{\star} - \omega_{\star}) \\ &-.01603 \cos(\alpha + 2M_{\star} - \omega_{\star}) \\ &-.00069 \cos(\alpha - \omega_{\star}) ] \end{aligned} \quad \dots \text{III.27}$$

cuja solução apresenta um termo de amplitude preponderante da ordem  $16.713 \times 10^{-5}$  graus e período próximo a 1 dia.

D - Vetor Inclinação

Considerando  $r \approx a + o(e)$  tem-se para o vetor Terra-satélite ( $\vec{r}$ )

$$r_x = a \cos \alpha$$

$$r_y = a \sin \alpha$$

$$r_z = a(i_x \sin \alpha - i_y \cos \alpha)$$

e assim,

$$\frac{di_x}{dt} = -.39785 \frac{\sigma}{n_s a_s} \cos \alpha \sin \lambda_{\star}$$

$$\frac{di_y}{dt} = -.39785 \frac{\sigma}{n_s a_s} \sin \alpha \sin \lambda_{\star}$$

ou ainda

$$\frac{di_x}{dt} = -.198925 \frac{\sigma}{n_s a_s} [\sin(\alpha + \lambda_{\star}) - \sin(\alpha - \lambda_{\star})]$$

$$\frac{di_y}{dt} = -.198925 \frac{\sigma}{n_s a_s} [\cos(\alpha + \lambda_{\star}) - \cos(\alpha - \lambda_{\star})] \quad \dots III.28$$

as amplitudes da solução são da ordem de  $10^{-6}$  graus e períodos da ordem de 1 dia.

### III.2 - Comparação das Amplitudes dos Termos Periódicos

Neste ítem são comparadas as amplitudes dos principais termos periódicos obtidos por quatro autores: Cot (médio e longo períodos), Balsam, Legendre e Kamel citados anteriormente. As comparações são feitas nas tabelas III.2, III.3 e III.4 que se seguem. Os termos resultantes da radiação solar (ver tabela III.3) são difíceis de comparar, uma vez que uns autores padronizam certos valores para as características do satélite (tais como área, coeficiente de refletividade, etc.) e outros não; e também porque o modelo de Kamel ainda está sendo implantado para o controle dos satélites Brasilsat A1 & A2, de maneira que não foram introduzidos os efeitos da radiação solar. A tabela III.2 mostra que os resultados obtidos por Balsam e Anzel (1969) para a deriva estão completamente em desacordo com os outros três que são por sua vez, compatíveis entre si. Alguns valores obtidos por Cot (1984) estão entre colchetes, significando que existe um intervalo de variação que é função da inclinação da Lua. Os outros autores não especificam o valor da inclinação quando utilizada para os cálculos.

TABELA III.2 - VETOR DERIVA

FREQUÊNCIA/ PERÍODO/(DIAS)	$l \times 10^{-3}$ (grau)				$d \times 10^{-3}$ (grau/dia)			
	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE
$3(n_s - n_c) / .5175$	- 2.3		- 2.34	- 2.3	28.42	[-11.8, -12.75]	- 12.45	- 12.39
$2n_c / 13.77$	4.81	[-1.9, 4.4]	- 2.99	- 3.				
$n_1 / 27.55$	- 3.38		- 3.04	- 3.0				
$(2n_s - 3n_c) / .527$					6.58		- 2.43	- 2.41
$3(n_s - n_c) / .345$			- .174		3.09		1.085	1.08
$2(n_s - n_{*}) / .5$	- 1.03		- 1.03	- 1.03	13.52	-5.58	- 5.577	- 5.58
$2n_{*} / 182.625$	- 18.45	- 18.6	-18.55	- 19.0				
$2n_s / .499$			- .28		- .435		- 1.03	- 1.05
$2n_s / .499$							- .49	
$2(n_s - n_c) / .5176$							- .46	
$n_s - n_c / 1.035$			- .195				.405	
OBS.:								
0 * é relativo								
ao Sol.								

TABELA III.3 - VETOR EXCENTRICIDADE

FREQÜENCIA/ PERÍODO(DIAS)	$e_x \times 10^{-5}$				$e_y \times 10^{-5}$			
	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE
$(n_s - 2n_c)/1.015$	3.7		3.48	3.5	3.7		3.68	3.7
$(n_s - 3n_c)/1.12$	.8		.69		-.8		-.73	
$3n_c/9.185$	.6	[-.255, -.388]	-.270		.6	[-.288, -.44]	-.297	
$n_c/27.55$	-3.5	[-2.3, -3.5]	-1.5	-1.7	3.5	[-2.23, -3.43]	-3.43	-3.6
$(n_s - 2n_x)/1.003$	1.5		1.5	1.5	-1.5		-1.59	-1.6
$n_x/365.25$		1.376xF		1.5xF		1.5xF		1.5xF
$n_s/.997$	3.0	3.71	3.72	3.4	3.0	3.71	3.72	2.8
$n_s/.997$			-.33				-.90	
$n_s/.997$			-.15				-.42	
$(3n_s - 2n_c)/.341$			.38				.38	
$(2n_s - 3n_c)/.528$			.226				-.233	
1065.:								
$\sigma$								
$F = \frac{\sigma}{n_s n_a}$								



TABELA III.4 - VETOR INCLINAÇÃO

FREQUÊNCIA/ PERÍODO/(DIAS)	$i_x \times 10^{-3}$ (grau)				$i_y \times 10^{-3}$ (grau)			
	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE	BALSAM	COT	KAMEL	LEGENDRE
$3n_1/9.185$	- .75		- .996				- .439	
$2n_1/13.77$	- 3.90	- 3.81	- 3.75	- 3.7	- 3.90	- 3.48	- 3.44	- 3.4
$n_1/27.55$			.003		1.06		1.13	
$3n_2/121.75$	- .92		- .90	- .90	- .92		- .83	- .8
$2n_2/182.625$	-22.86	-23.34	-23.11	-23.3	- 22.86	-21.42	-21.19	-21.4
$2n_5/.499$	- .23		- .185		- .23		- .185	
$2(n_5 - n_1)/.5175$			.136				.136	
$2n_1/13.633$			- .78				- .56	

### III.3 - Forma Final das Equações

O capítulo II especifica a forma das equações de propagação dos elementos orbitais, ou seja,

$$E_j(t) = E_{j0} + E_{j1} + E_{j2}t^2 + \sum_{i=3}^{i=n_p} A_{ji} \frac{\text{sen}}{\cos} (B_{ji}t + C_{ji}) \quad \dots \text{II.12}$$

No item III.1 são obtidas as evoluções dos elementos orbitais em função do tempo obedecendo a forma da expressão acima. No item III.2 as equações de evolução podem ser também expressas como II.12, de maneira que são utilizadas complementando o modelo de propagação de Cot (1984). O vetor estado  $\lambda$ , a ser estimado, é dado por

$$\lambda_1 = l(t_0)$$

$$\lambda_2 = d(t_0)$$

$$\lambda_3 = e_x(t_0)$$

$$\lambda_4 = e_y(t_0)$$

$$\lambda_5 = i_x(t_0)$$

$$\lambda_6 = i_y(t_0)$$

$$\lambda_7 = \frac{S}{m}, \text{ onde } S \text{ é a superfície transversal na qual incidem os raios solares e } m \text{ é a massa do satélite.}$$

A forma final das equações, após eliminados termos de amplitudes muito pequenas, é dada por

$$l(t) = l(t_0) + d(t_0) \cdot (t - t_0) + \frac{3}{2} n^2 G_1 \cdot (t - t_0)^2 + l_{\star} [\text{sen} 2\lambda_{\star}(t) - \text{sen} 2\lambda_{\star}(t_0)] \\ + l_{\ell} [\text{sen} 2\lambda_{\ell}(t) - \text{sen} 2\lambda_{\ell}(t_0)] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

$$d(t) = d(t_0) + 3n^2 G_1 \cdot (t - t_0) + d_{\star} [\cos 2(\alpha_S(t) - \lambda_{\star}(t)) - \cos 2(\alpha_S(t_0) - \lambda_{\star}(t_0))] \\ + d_{\ell} [\cos 2(\alpha_S(t) - \alpha_{\ell}(t)) - \cos 2(\alpha_S(t_0) - \alpha_{\ell}(t_0))] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

$$e_x(t) = e_x(t_0) + e_t [(\cos \alpha(t) - \cos \alpha(t_0))] + e_{x\star} [\cos \lambda_{\star}(t) - \cos \lambda_{\star}(t_0)] \\ + e_{x\ell 1} [\cos \lambda_{\ell}(t) - \cos \lambda_{\ell}(t_0)] + e_{x\ell 3} [\cos 3\lambda_{\ell}(t) - \cos 3\lambda_{\ell}(t_0)] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

$$e_y(t) = e_y(t_0) + e_t [(\text{sen} \alpha(t) - \text{sen} \alpha(t_0))] + e_{y\star} [\text{sen} \lambda_{\star}(t) - \text{sen} \lambda_{\star}(t_0)] \\ + e_{y\ell 1} [\text{sen} \lambda_{\ell}(t) - \text{sen} \lambda_{\ell}(t_0)] + e_{y\ell 3} [\text{sen} 3\lambda_{\ell}(t) - \text{sen} 3\lambda_{\ell}(t_0)] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

$$i_x(t) = i_x(t_0) + i_{x\star\ell} \cdot (t - t_0) + i_{x\star} [\cos 2\lambda_{\star}(t) - \cos 2\lambda_{\star}(t_0)] \\ + i_{x\ell} [\cos 2\lambda_{\ell}(t) - \cos 2\lambda_{\ell}(t_0)] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

$$i_y(t) = i_y(t_0) + i_{y\star\ell} \cdot (t - t_0) + i_{y\star} [\text{sen} 2\lambda_{\star}(t) - \text{sen} 2\lambda_{\star}(t_0)] \\ + i_{y\ell} [\text{sen} 2\lambda_{\ell}(t) - \text{sen} 2\lambda_{\ell}(t_0)] \\ + \text{termos periódicos complementares}$$

## CAPÍTULO IV - Análise dos Resultados

### IV.1 - Resultados

Os resultados apresentados a seguir são obtidos através de um programa, feito na linguagem Fortran-77 e rodado no Mx-850 (Vax 11/750), da Divisão de Segmento Espacial - Embratel. A estrutura deste programa, contendo as variáveis de entrada e saída, bem como os módulos envolvidos, é apresentada no Apêndice III.

#### IV.1.1 - Propagação da Órbita

Como mencionado anteriormente, a propagação semi-analítica é escolhida, visando uma rapidez de processamento e devido à forma parametrizada na qual são expressas as equações da evolução da órbita, sendo válida dentro de um intervalo de tempo de pelo menos 24 hs, que é aproximadamente o período de revolução do satélite em torno do centro de massa da Terra. De maneira que são considerados aqueles termos com amplitudes significativas com frequências de curtos períodos, além dos seculares, longos e médios períodos.

Na presente tese são recalculados os termos preponderantes, obtidos por Cot, utilizando as constantes astronômicas recomendadas pela IAU (1976), as características do satélite Brasilsat A1 e a longitude na qual é controlado. São os seguintes os valores utilizados.

##### 1) Satélite

Movimento médio síncrono	6.3 rad/dia
Longitude de Controle	65°.0 oeste
Coeficiente de Refletividade	1.2

## 2) Terra

Raio Equatorial	6378.14 Km	
Razão da Massa Sol/Terra	332946.0	
Harmônicos Zonais		
$J_2 = .00108263$	$J_3 = -.254 \times 10^{-5}$	$J_4 = -.161 \times 10^{-5}$
Harmônicos Tesserais		
$C_{22} \approx 1.5736 \times 10^{-6}$	$C_{31} \approx 2.1914 \times 10^{-6}$	$C_{33} \approx .10085 \times 10^{-6}$
$S_{22} \approx .9032 \times 10^{-6}$	$S_{31} \approx .2697 \times 10^{-6}$	$S_{33} \approx .1973 \times 10^{-6}$
Constante gravitacional da Terra	$398600.5 \text{ Km}^3 \text{ s}^{-2}$	

## 3) Lua

Razão da Massa Terra/Lua	.01230002
Movimento Médio	.22803 rad/dia
Inclinação do plano orbital da Lua com a eclíptica	$5^\circ.143396$

## 4) Sol

Massa	$1.9891 \times 10^{30} \text{ Kg}$
Inclinação da eclíptica	$23^\circ 26' 21''.448$
Movimento médio	.0172 rad/dia
Pressão da Radiação Solar	$4.63 \times 10^{-6} \text{ N/m}^2$

As tabelas IV.1A a IV.1C mostram os resultados obtidos relacionando tipo de perturbação, frequências e amplitudes respectivamente.

Tabela IV.1A - Vetor Deriva

Tipo/ Frequência	$l \cdot 10^{-3}$	$d \cdot 10^{-3}$
Secular	$-0^{\circ}.684/\text{dia}^2$	$-1^{\circ}.368/\text{dia}^2$
$2n_{\star}$	$18^{\circ}.56$	
$2n_{\ell}$	$4^{\circ}.28$	
$2(n_s - n_{\star})$		$5^{\circ}.58/\text{dia}$
$2(n_s - n_{\ell})$		$11^{\circ}.85/\text{dia}$

Tabela IV.1B - Vetor Excentricidade

Tipo/ Frequência	$e_x \cdot 10^{-4}$	$e_y \cdot 10^{-4}$
$n_{\star}$	2.89	3.15
$n_{\ell}$	0.342	0.336
$3n_{\ell}$	-0.0382	-0.0429
$n_s$	0.3716	0.3716

Tabela IV.1C - Vetor Inclinação

Tipo/ Frequência	$i_x \cdot 10^{-3}$	$i_y \cdot 10^{-3}$
Secular	$(-3.6 \text{ sen} \Omega_{\ell e})^{\circ}/\text{dia}$	$(23.4 + 2.7 \text{ cos} \Omega_{\ell e})^{\circ}/\text{dia}$
$2n_{\star}$	$23^{\circ}.333$	$21^{\circ}.408$
$2n_{\ell}$	$3^{\circ}.743$	$3^{\circ}.4421$

As figuras IV.1 a IV.10 são os gráficos comparativos da propagação semi-analítica e numérica para os elementos não singulares, como também semi-eixo maior, azimute, elevação e distância. O intervalo de propagação é de 24 hs a partir da época 88 09 18 16 10 GMT (ano, mês, dia, hora, minuto). A tabela IV.2 apresenta os respectivos valores numéricos dos pontos. As figuras IV.1' são os gráficos das diferenças entre os dois métodos.

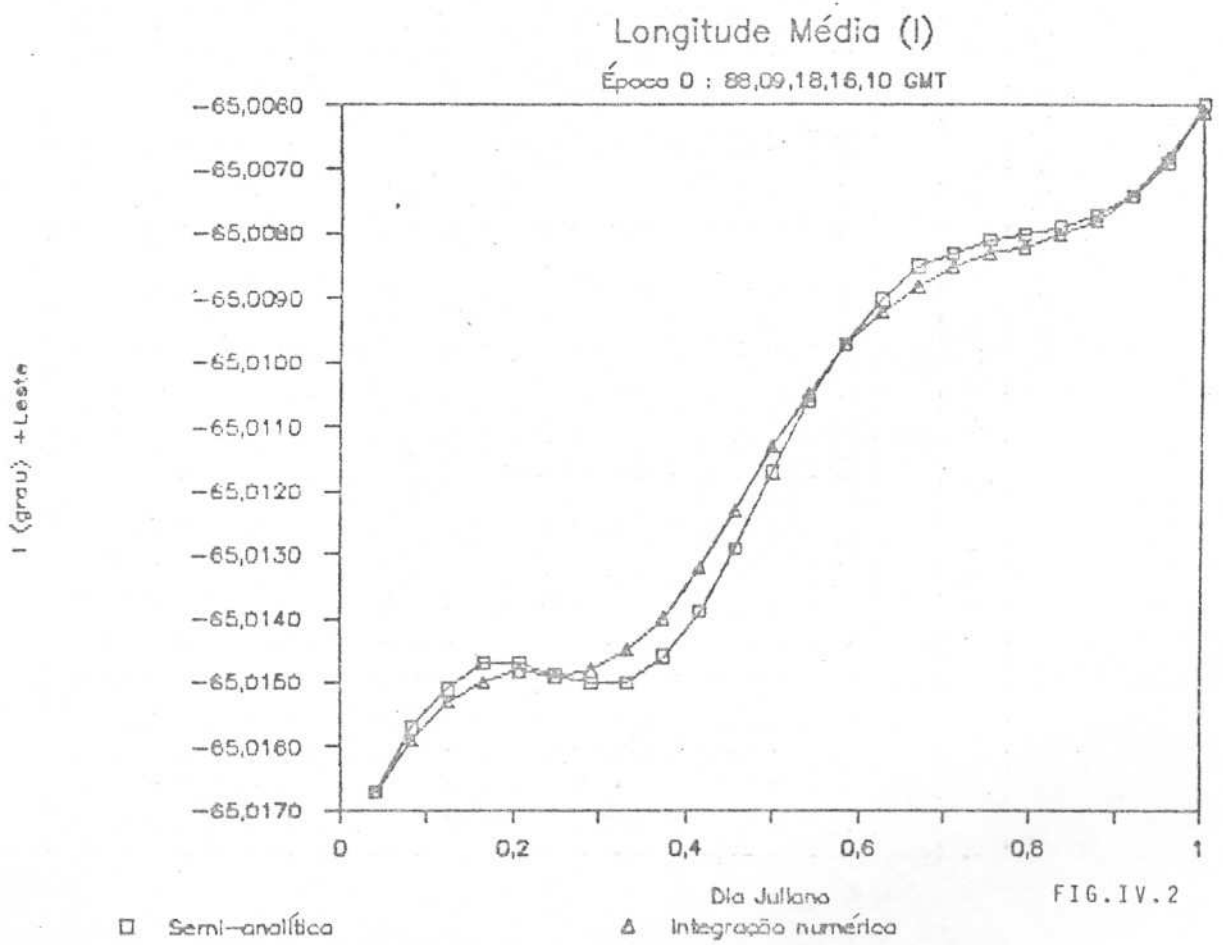
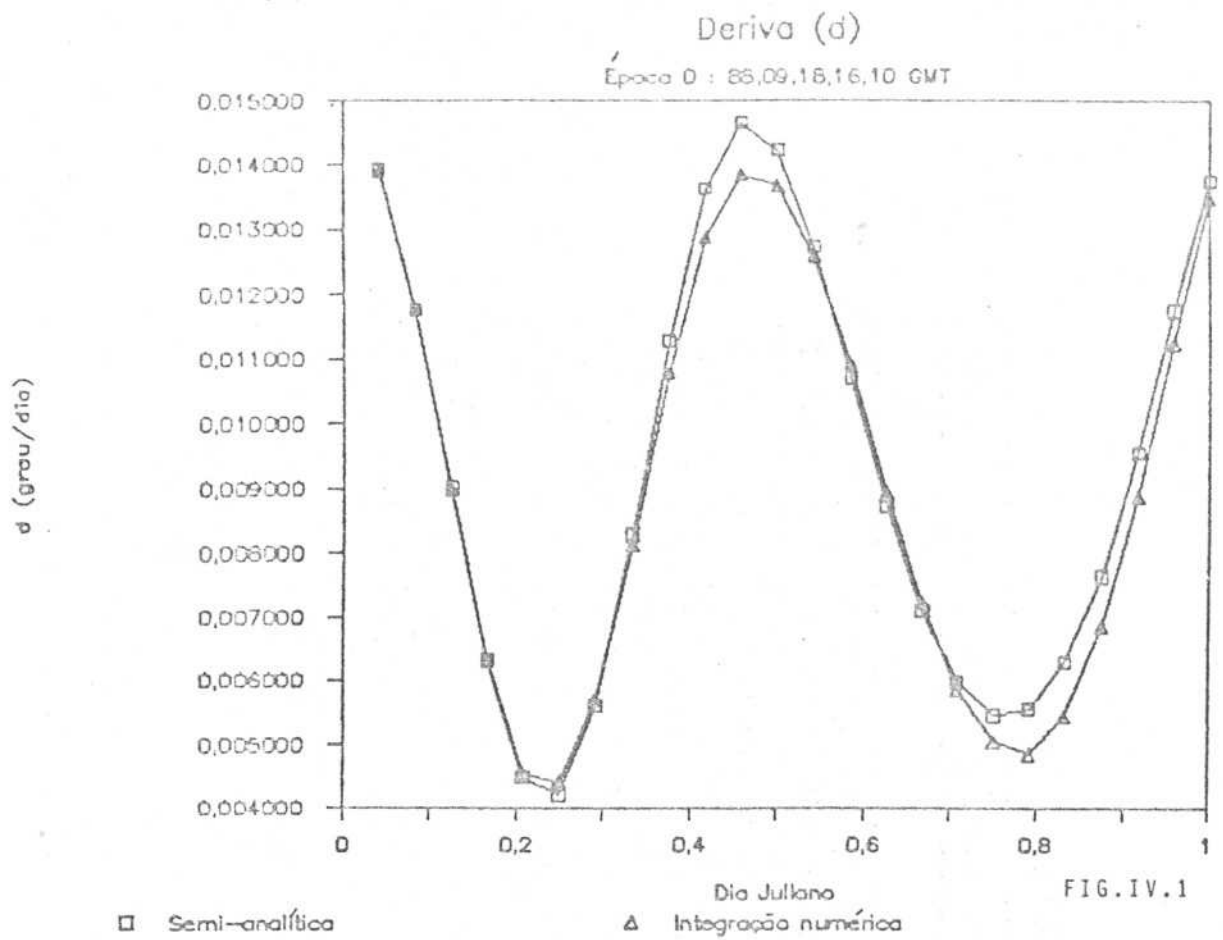
TABELA IV.2a - PROPAGAÇÃO SEMI-ANALÍTICA

EPOCA	a(km)	d(grau/dia)	i(grau)	ex	ey	ix(grau)	iy(grau)	Az(grau)	El(grau)	Os(km)	Dt(dia)
Semi-analítica											
88 9 18 17 10 0	42164,62	0,013931	-65,0167	-0,0000864	0,0000113	-0,03090	-0,02467	314,849	53,897	36837,172	0,04175
88 9 18 18 10 0	42164,78	0,011766	-65,0157	-0,0000875	0,0000610	-0,03080	-0,02461	314,865	53,891	36837,906	0,08325
88 9 18 19 10 0	42165,00	0,009906	-65,0151	-0,0000875	-0,0000890	-0,03065	-0,02453	314,881	53,883	36838,509	0,12500
88 9 18 20 10 0	42165,21	0,006310	-65,0147	-0,0000857	-0,0000175	-0,03050	-0,02432	314,896	53,876	36839,844	0,16675
88 9 18 21 10 0	42165,35	0,004494	-65,0147	-0,0000821	-0,0000231	-0,03037	-0,02408	314,909	53,869	36840,977	0,20825
88 9 18 22 10 0	42165,37	0,004210	-65,0149	-0,0000772	-0,0000247	-0,03030	-0,02378	314,920	53,862	36842,141	0,25000
88 9 18 23 10 0	42165,26	0,005626	-65,0150	-0,0000718	-0,0000217	-0,03029	-0,02348	314,927	53,857	36843,266	0,29175
88 9 19 0 10 0	42165,05	0,008209	-65,0150	-0,0000671	-0,0000150	-0,03035	-0,02320	314,930	53,854	36844,254	0,33325
88 9 19 1 10 0	42164,82	0,011283	-65,0146	-0,0000633	-0,0000059	-0,03046	-0,02297	314,929	53,853	36845,008	0,37500
88 9 19 2 10 0	42164,64	0,015623	-65,0139	-0,0000602	0,0000040	-0,03068	-0,02280	314,924	53,853	36845,438	0,41675
88 9 19 3 10 0	42164,56	0,014648	-65,0129	-0,0000574	0,0000139	-0,03068	-0,02271	314,915	53,855	36845,504	0,45825
88 9 19 4 10 0	42164,59	0,014234	-65,0117	-0,0000547	0,0000237	-0,03074	-0,02267	314,904	53,860	36845,176	0,50000
88 9 19 5 10 0	42164,71	0,012793	-65,0106	-0,0000526	0,0000333	-0,03073	-0,02264	314,891	53,866	36844,480	0,54175
88 9 19 6 10 0	42164,87	0,010721	-65,0097	-0,0000518	0,0000428	-0,03066	-0,02260	314,877	53,873	36843,488	0,58325
88 9 19 7 10 0	42165,02	0,008730	-65,0098	-0,0000531	0,0000516	-0,03055	-0,02252	314,864	53,881	36842,277	0,62500
88 9 19 8 10 0	42165,15	0,007194	-65,0085	-0,0000565	0,0000589	-0,03042	-0,02239	314,851	53,889	36840,945	0,66675
88 9 19 9 10 0	42165,23	0,006001	-65,0083	-0,0000616	0,0000641	-0,03031	-0,02217	314,840	53,897	36839,602	0,70825
88 9 19 10 10 0	42165,27	0,005477	-65,0081	-0,0000677	0,0000668	-0,03024	-0,02192	314,833	53,904	36838,348	0,75000
88 9 19 11 10 0	42165,27	0,005562	-65,0080	-0,0000738	0,0000664	-0,03025	-0,02165	314,828	53,909	36837,285	0,79175
88 9 19 12 10 0	42165,21	0,006289	-65,0079	-0,0000792	0,0000633	-0,03031	-0,02140	314,828	53,913	36836,484	0,83325
88 9 19 13 10 0	42165,10	0,007652	-65,0077	-0,0000832	0,0000575	-0,03043	-0,02119	314,831	53,915	36836,004	0,87500
88 9 19 14 10 0	42164,96	0,009553	-65,0074	-0,0000851	0,0000495	-0,03068	-0,02104	314,837	53,915	36835,859	0,91675
88 9 19 15 10 0	42164,79	0,011736	-65,0069	-0,0000848	0,0000400	-0,03071	-0,02095	314,847	53,913	36836,035	0,95825
88 9 19 16 10 0	42164,63	0,013758	-65,0060	-0,0000825	0,0000300	-0,03079	-0,02091	314,859	53,909	36836,484	1,00000



TABELA IV.2b - PROPAGAÇÃO NUMÉRICA

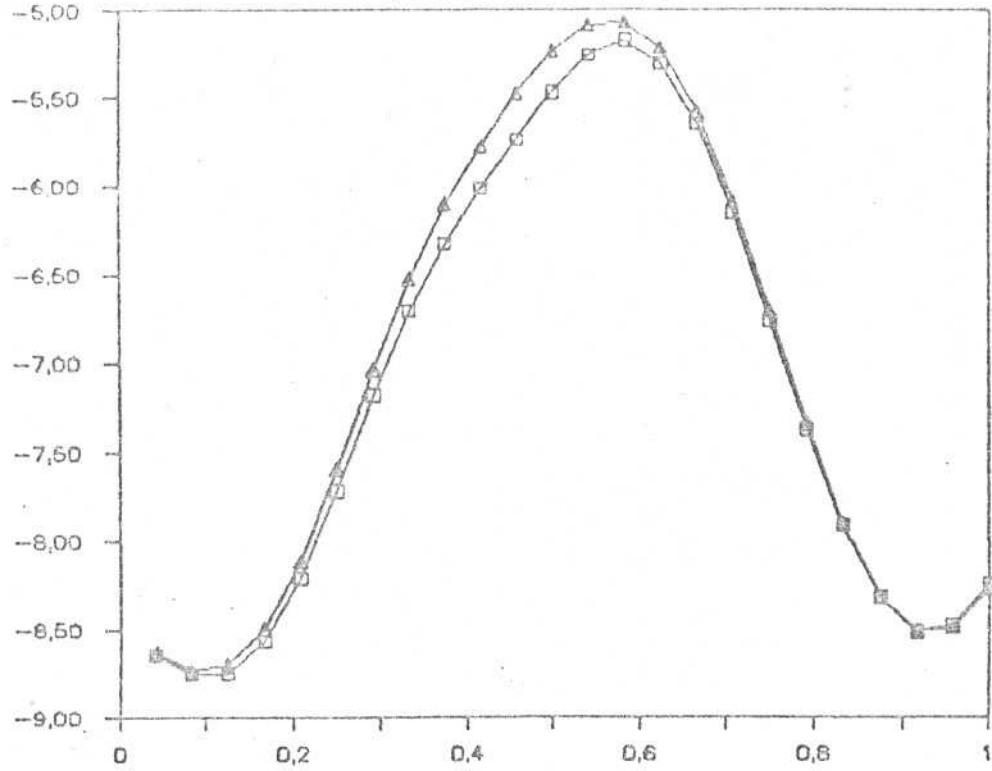
ÉPOCA	a(km)	d(grau/dia)	l(grau)	ex	ey	ix(grau)	iy(grau)	Az(grau)	El(grau)	Ds(km)	Dt(dia)
Integração Numérica											
88 9 18 17 10 0	42164,62	0,013910	-65,0167	-0,00000363	0,0000113	-0,03093	-0,02475	314,849	53,897	36837,480	0,04175
88 9 18 18 10 0	42164,78	0,011780	-65,0159	-0,00000873	0,0000011	-0,03080	-0,02471	314,865	53,891	36837,918	0,08325
88 9 18 19 10 0	42165,00	0,008972	-65,0153	-0,00000870	-0,0000088	-0,03063	-0,02460	314,880	53,883	36838,828	0,12500
88 9 18 20 10 0	42165,21	0,006325	-65,0150	-0,00000550	-0,0000171	-0,03044	-0,02439	314,896	53,876	36839,871	0,16675
88 9 18 21 10 0	42165,34	0,004550	-65,0148	-0,00000812	-0,0000226	-0,03028	-0,02409	314,909	53,869	36841,000	0,20825
88 9 18 22 10 0	42165,36	0,004421	-65,0149	-0,00000760	-0,0000242	-0,03021	-0,02373	314,920	53,862	36842,152	0,25000
88 9 18 23 10 0	42165,25	0,005712	-65,0148	-0,00000704	-0,0000214	-0,03023	-0,02337	314,927	53,858	36843,254	0,29175
88 9 19 0 10 0	42165,07	0,008133	-65,0145	-0,00000553	-0,0000151	-0,03033	-0,02305	314,930	53,854	36844,215	0,33325
88 9 19 1 10 0	42164,86	0,010779	-65,0140	-0,00000411	-0,0000064	-0,03048	-0,02282	314,929	53,853	36844,941	0,37500
88 9 19 2 10 0	42164,70	0,012877	-65,0132	-0,00000578	0,0000032	-0,03062	-0,02269	314,924	53,854	36845,363	0,41675
88 9 19 3 10 0	42164,62	0,013845	-65,0123	-0,00000548	0,0000131	-0,03072	-0,02264	314,916	53,856	36845,418	0,45825
88 9 19 4 10 0	42164,63	0,013684	-65,0113	-0,00000524	0,0000230	-0,03075	-0,02263	314,905	53,861	36845,074	0,50000
88 9 19 5 10 0	42164,72	0,012586	-65,0105	-0,00000599	0,0000329	-0,03071	-0,02263	314,892	53,866	36844,418	0,54175
88 9 19 6 10 0	42164,85	0,010940	-65,0097	-0,00000508	0,0000424	-0,03061	-0,02259	314,878	53,873	36843,437	0,58325
88 9 19 7 10 0	42165,00	0,008940	-65,0092	-0,00000522	0,0000513	-0,03047	-0,02250	314,864	53,881	36842,246	0,62500
88 9 19 8 10 0	42165,14	0,007229	-65,0088	-0,00000558	0,0000588	-0,03033	-0,02235	314,851	53,889	36840,930	0,66675
88 9 19 9 10 0	42165,24	0,005874	-65,0085	-0,00000609	0,0000641	-0,03022	-0,02213	314,840	53,897	36839,612	0,70825
88 9 19 10 10 0	42165,39	0,005067	-65,0083	-0,00000671	0,0000669	-0,03017	-0,02188	314,833	53,904	36838,375	0,75000
88 9 19 11 10 0	42165,32	0,004873	-65,0082	-0,00000735	0,0000668	-0,03019	-0,02161	314,828	53,909	36837,332	0,79175
88 9 19 12 10 0	42165,27	0,005454	-65,0080	-0,00000791	0,0000638	-0,03027	-0,02137	314,828	53,913	36836,539	0,83325
88 9 19 13 10 0	42165,16	0,006874	-65,0078	-0,00000832	0,0000590	-0,03040	-0,02117	314,831	53,915	36836,055	0,87500
88 9 19 14 10 0	42165,01	0,008875	-65,0074	-0,00000852	0,0000500	-0,03055	-0,02103	314,838	53,915	36835,895	0,91675
88 9 19 15 10 0	42164,82	0,011231	-65,0068	-0,00000849	0,0000407	-0,03070	-0,02096	314,847	53,913	36836,055	0,95825
88 9 19 16 10 0	42164,65	0,013458	-65,0061	-0,00000827	0,0000307	-0,03080	-0,02094	314,859	53,909	36836,496	1,00000



### Excentricidade (ex)

Época D : 88,09,18,16,10 GMT

ex x 1E+5



□ Semi-analítica

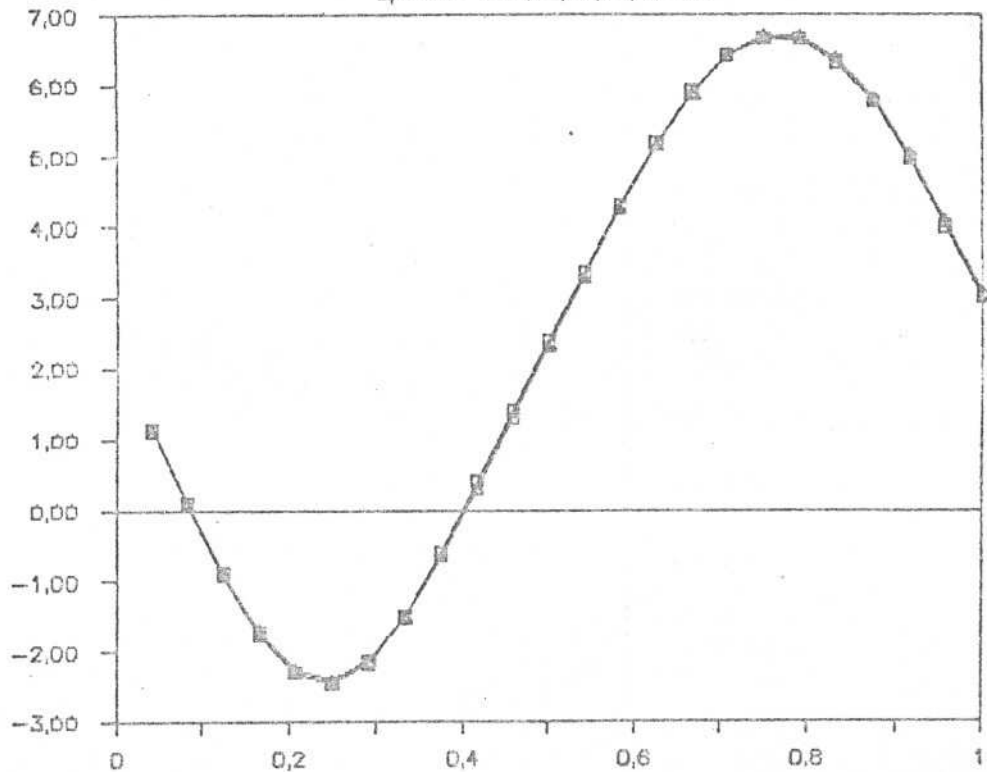
△ Integração numérica

FIG. IV.3

### Excentricidade (ey)

Época D : 88,09,18,16,10 GMT

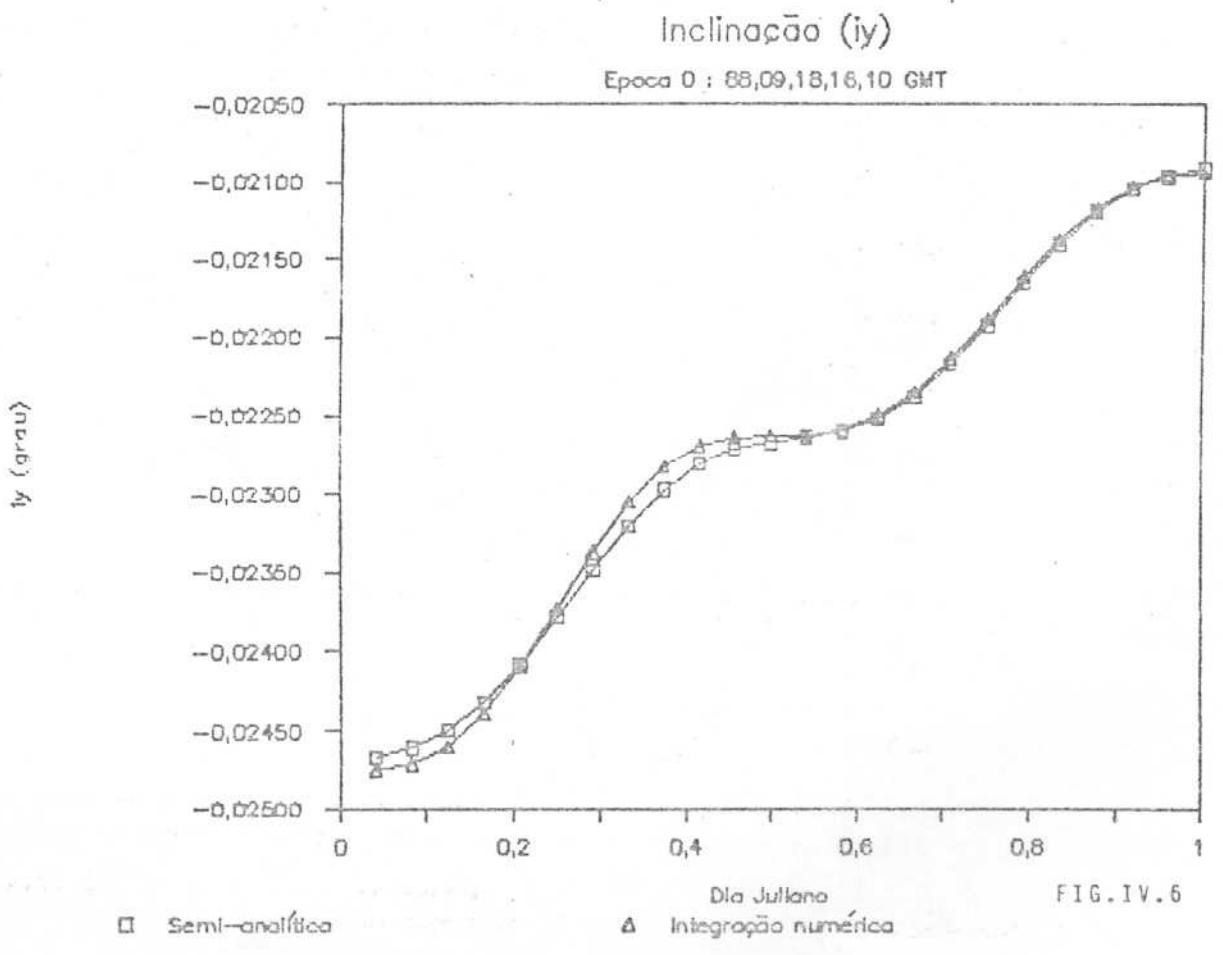
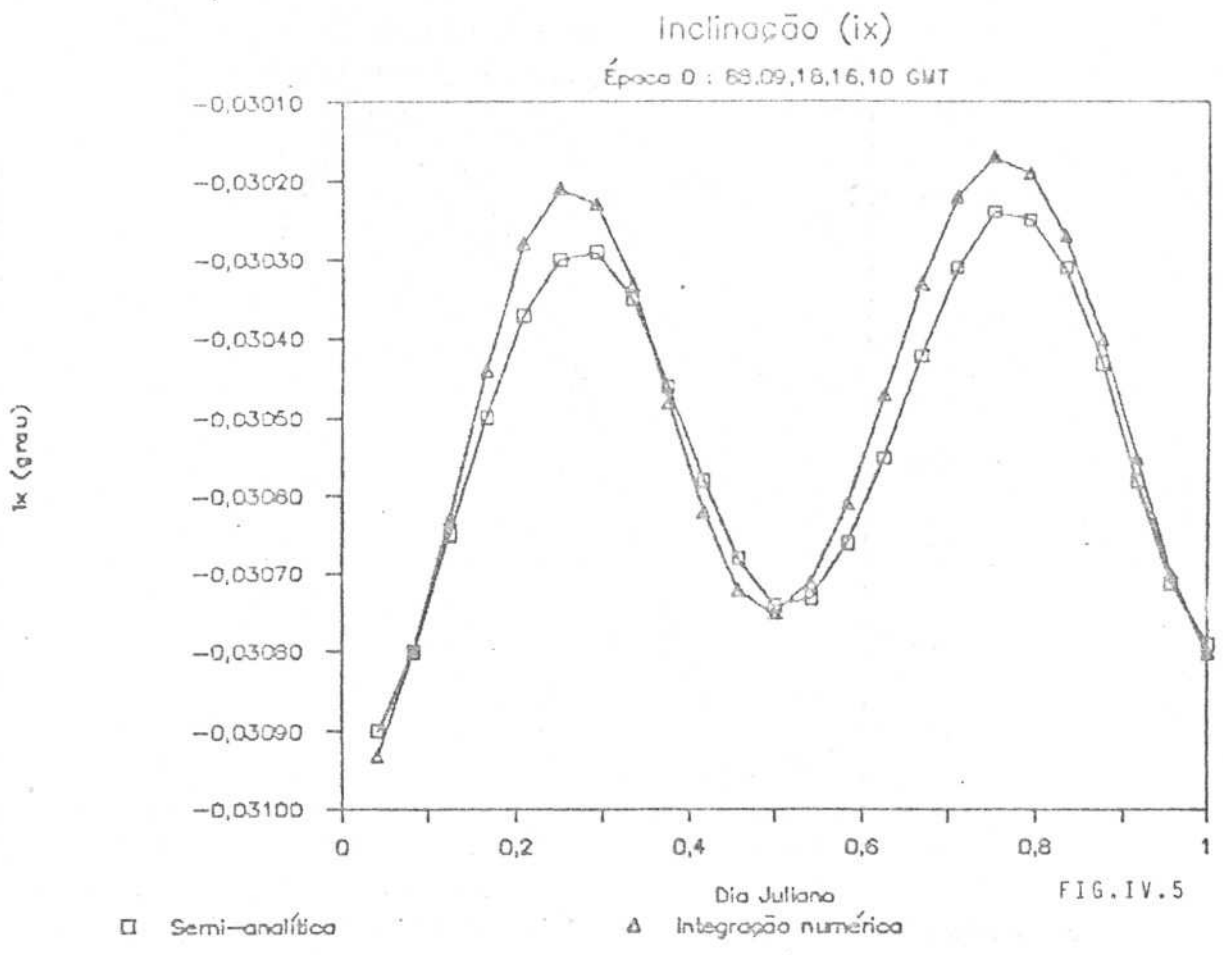
ey x 1E+5

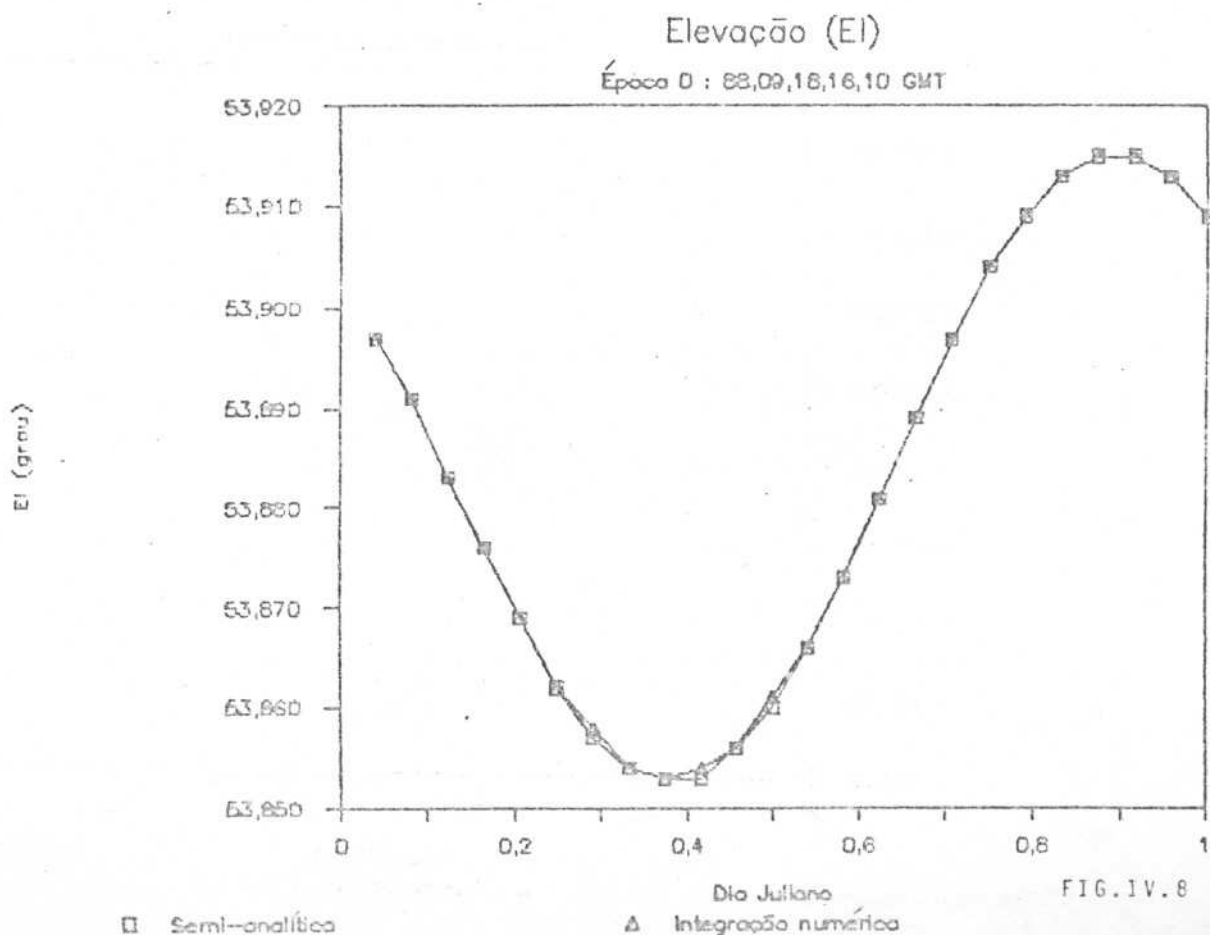
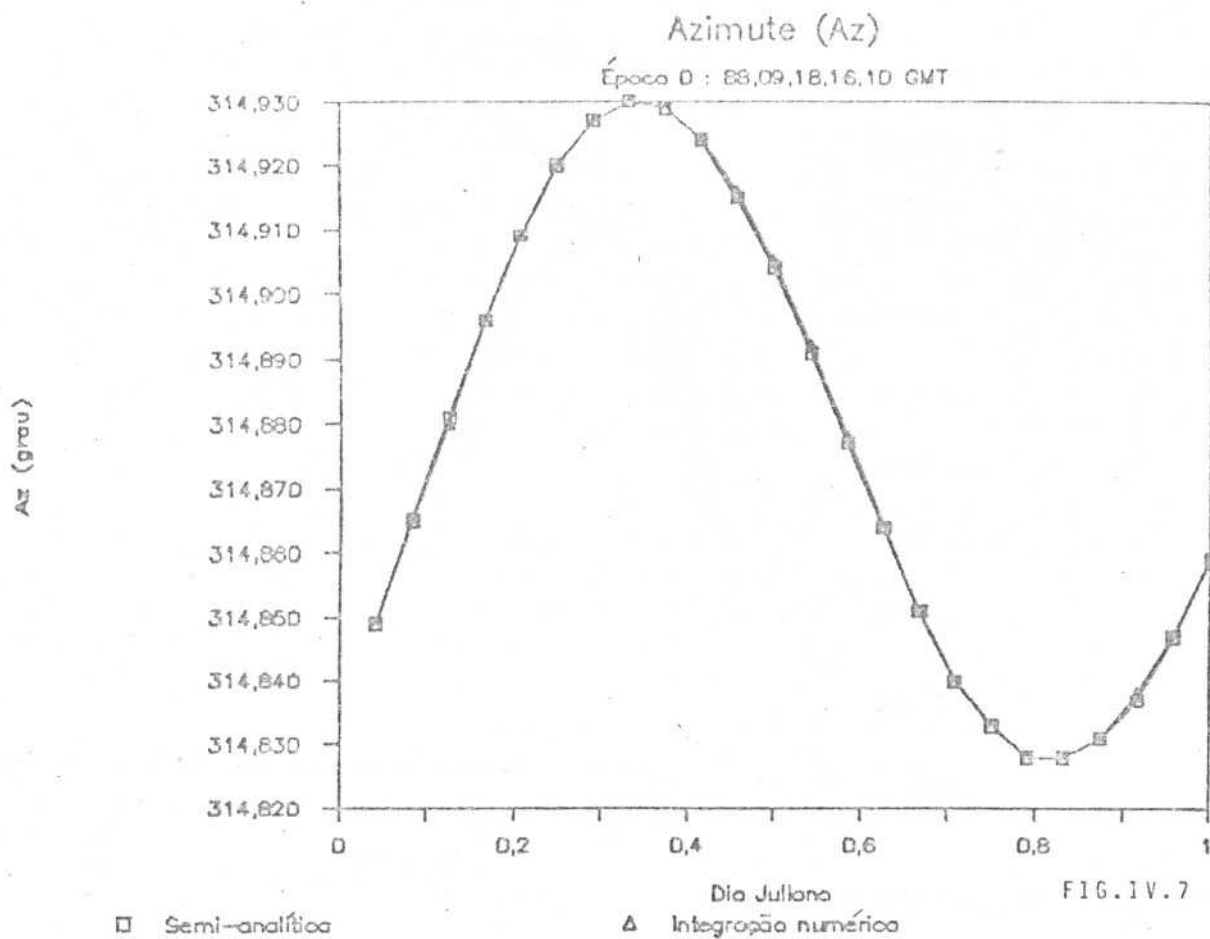


□ Semi-analítica

△ Integração numérica

FIG. IV.4





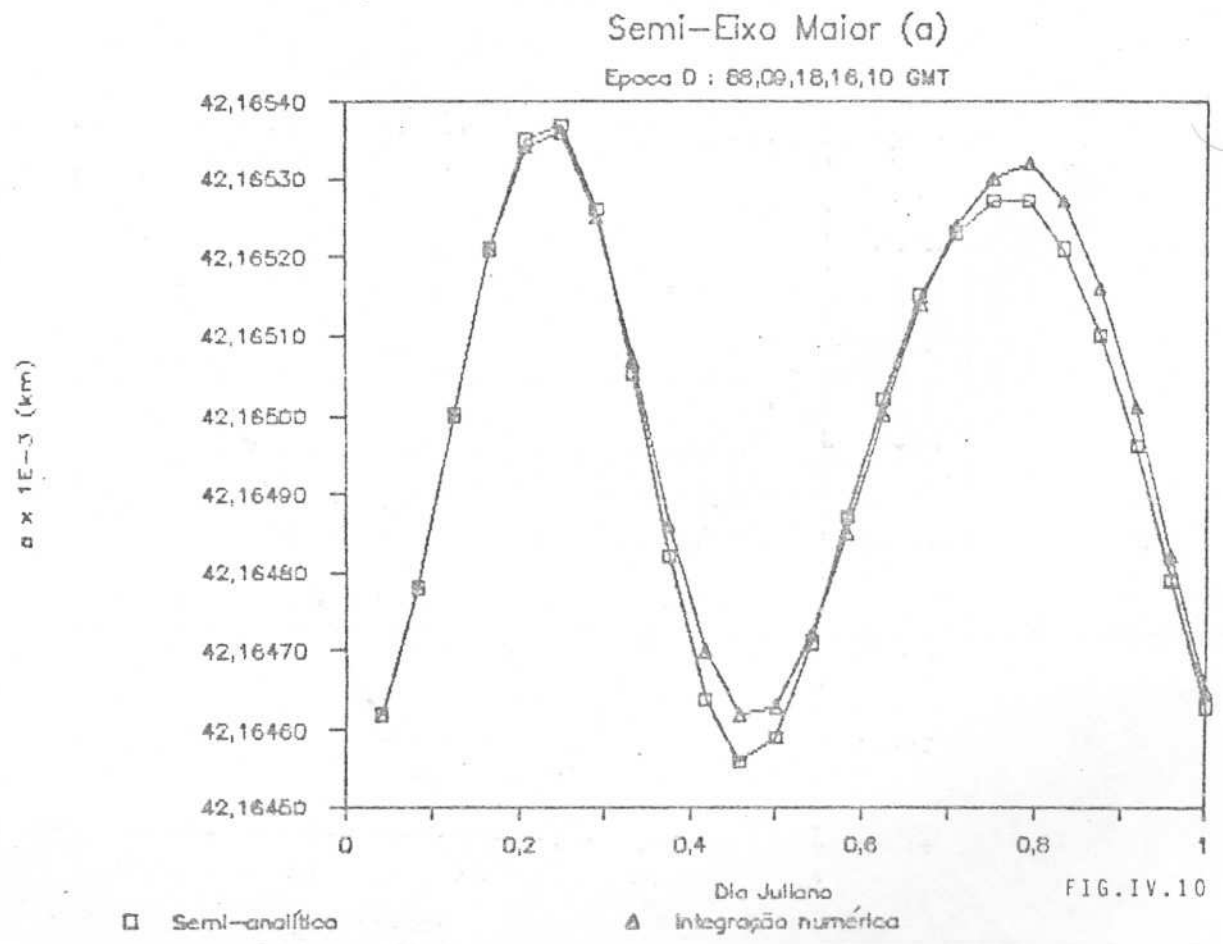
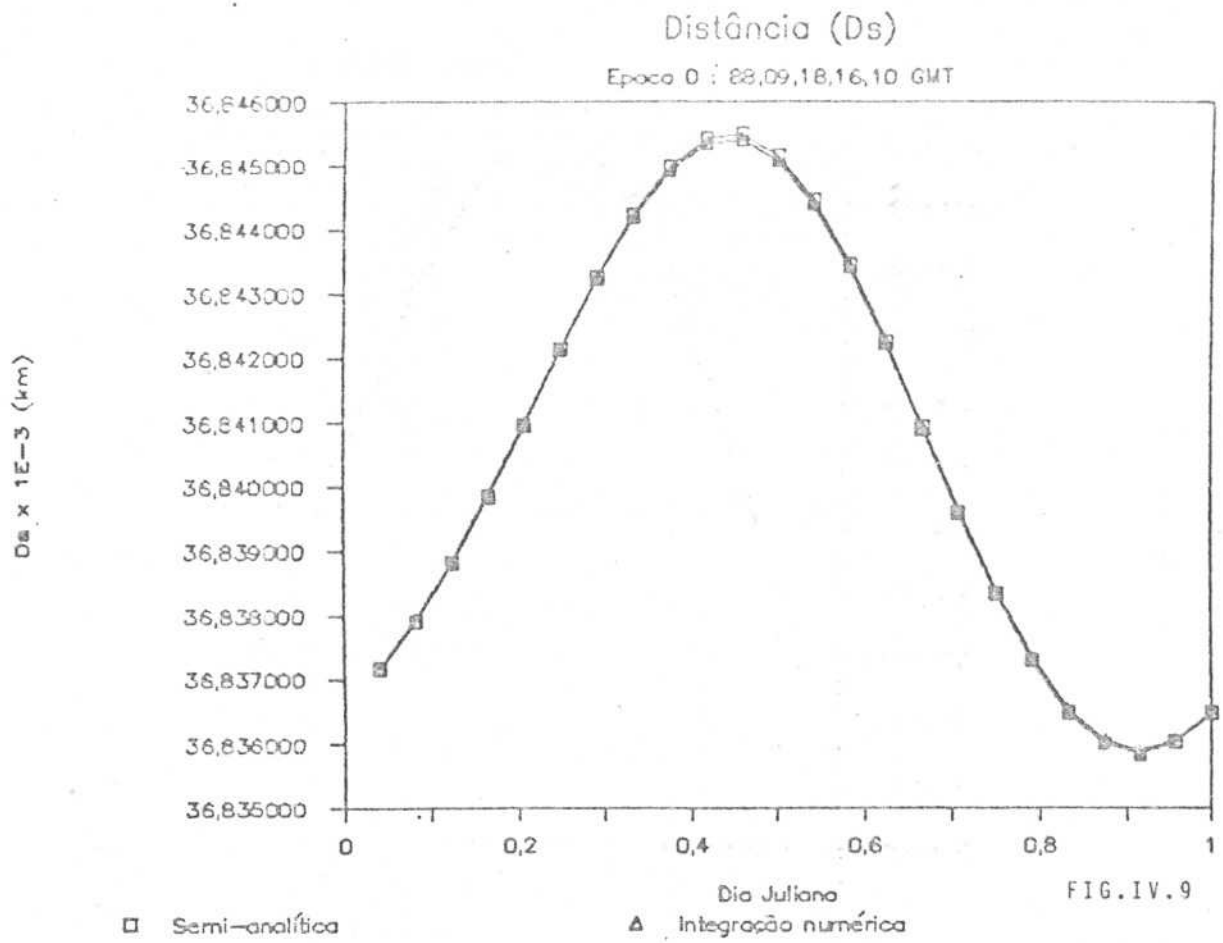
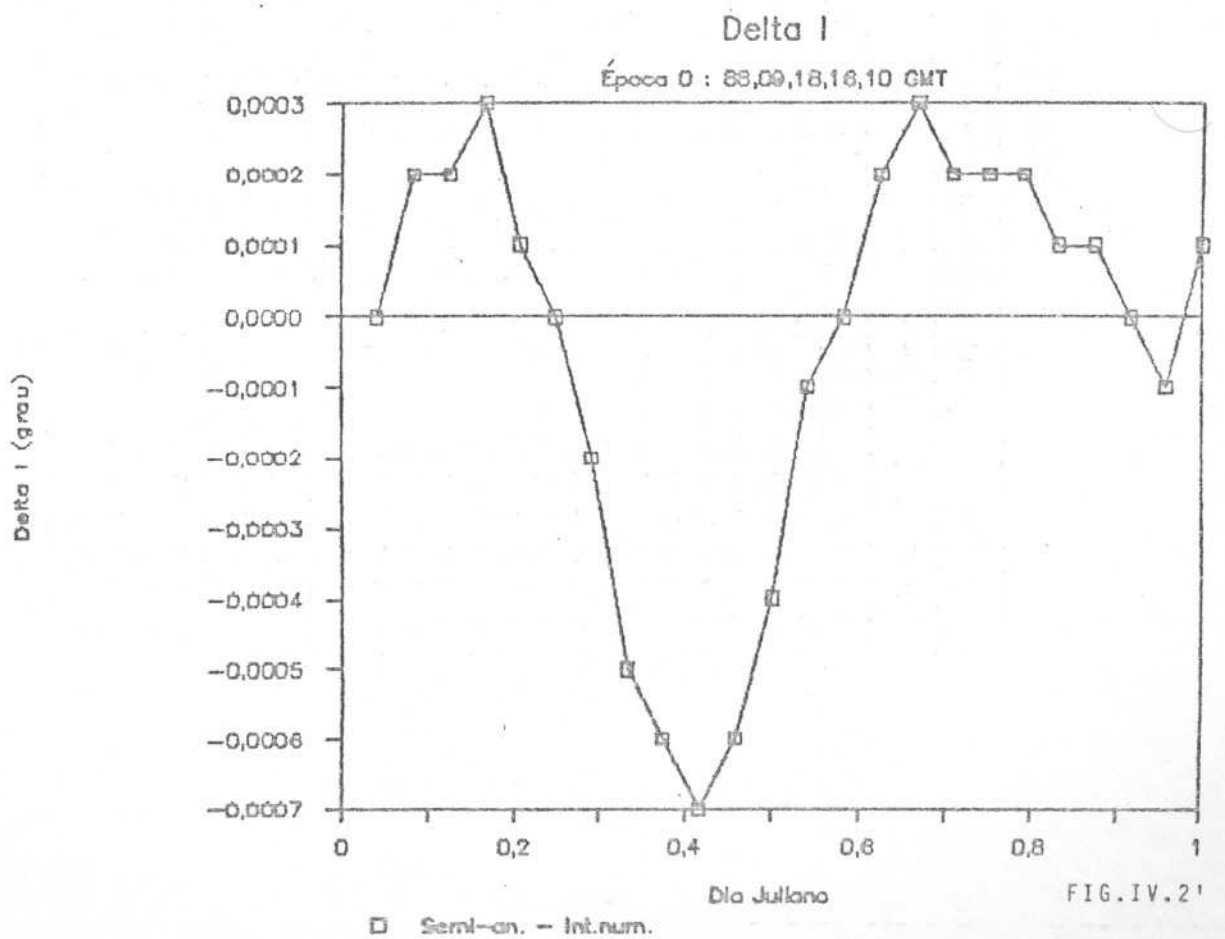
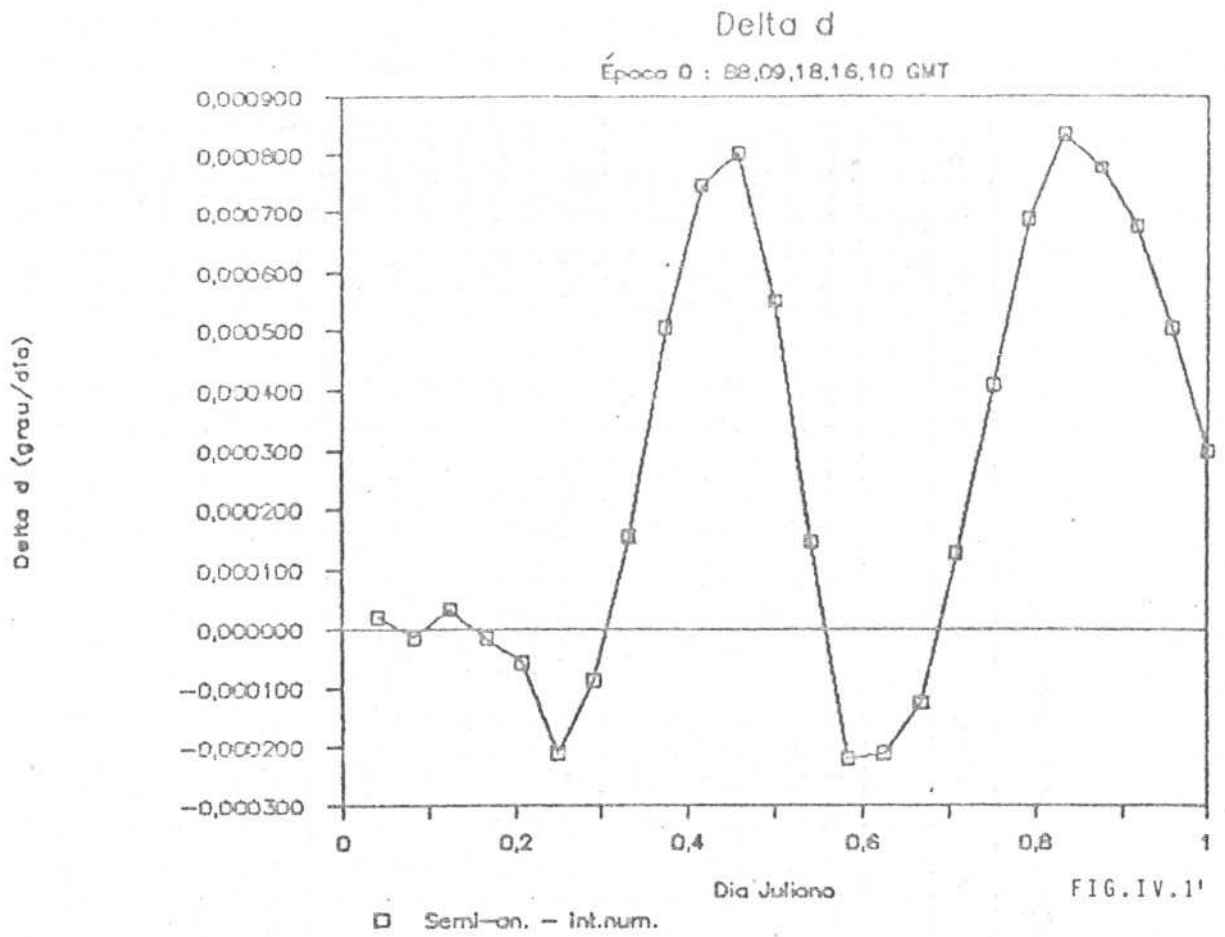


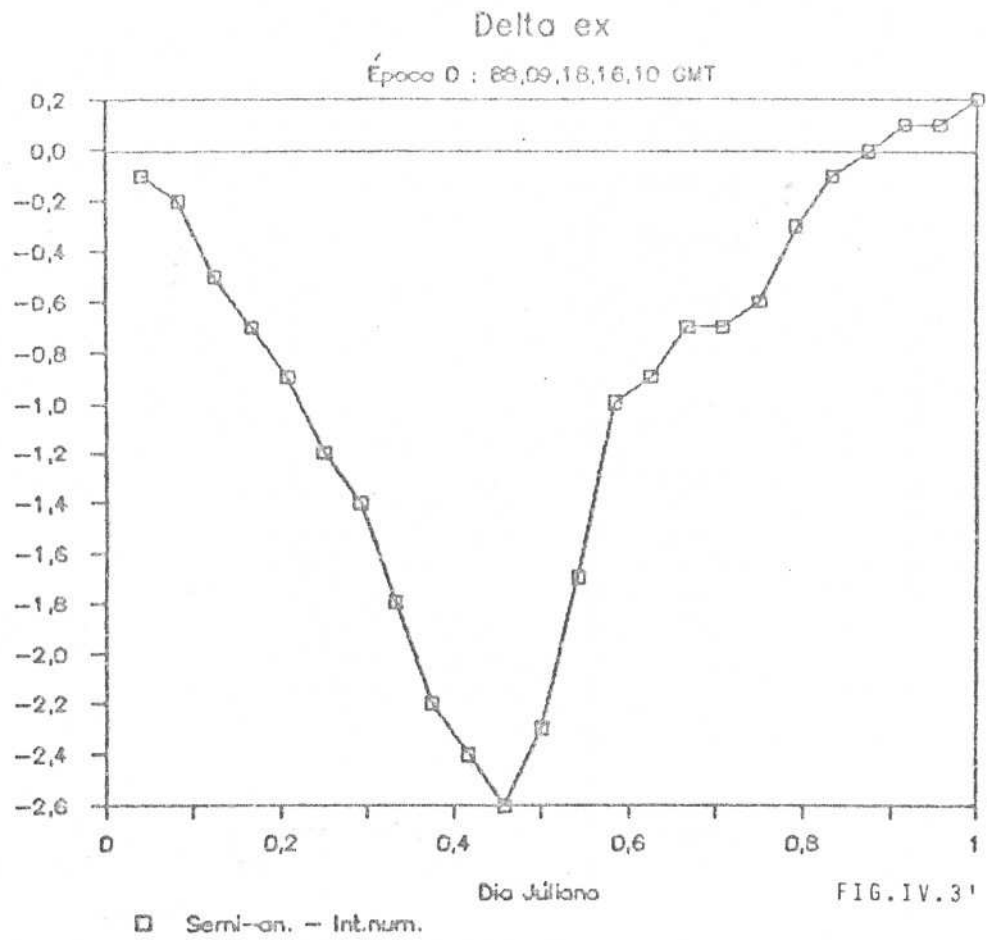
TABELA IV.3 - DIFERENÇA ENTRE OS ELEMENTOS

EPOCA	a(km)	d(gram/dia)	l(gram)	ex	ey	ix(gram)	iy(gram)	Az(gram)	El(gram)	Ds(km)	Dt(dia)
Semi-analítica - Integração Numérica											
88 9 18 17 10 0	0,00	0,000021	0,0000	-0,0000001	0,0000000	0,000000	0,000003	0,000	0,000	-0,000	0,04175
88 9 18 18 10 0	0,00	-0,000014	0,0002	-0,0000002	-0,0000001	0,000000	0,00010	0,000	0,000	-0,012	0,08325
88 9 18 19 10 0	0,00	0,000034	0,0002	-0,0000005	-0,0000002	-0,000002	0,00010	0,001	0,000	-0,019	0,12500
88 9 18 20 10 0	0,00	-0,000015	0,0003	-0,0000007	-0,0000004	-0,000006	0,00007	0,000	0,000	-0,027	0,16675
88 9 18 21 10 0	0,01	-0,000056	0,0001	-0,0000009	-0,0000005	-0,000009	0,00001	0,000	0,000	-0,023	0,20825
88 9 18 22 10 0	0,01	-0,000211	0,0000	-0,0000012	-0,0000005	-0,000009	-0,00005	0,000	0,000	-0,011	0,25000
88 9 18 23 10 0	0,01	-0,000085	-0,0002	-0,0000014	-0,0000003	-0,000006	-0,00011	0,000	-0,001	0,012	0,29175
88 9 19 0 10 0	-0,02	0,000156	-0,0005	-0,0000018	0,0000001	-0,000002	-0,00015	0,000	0,000	0,039	0,33325
88 9 19 1 10 0	-0,04	0,000504	-0,0006	-0,0000022	0,0000005	0,000002	-0,00015	0,000	0,000	0,067	0,37500
88 9 19 2 10 0	-0,06	0,000746	-0,0007	-0,0000024	0,0000008	0,000004	-0,00011	0,000	-0,001	0,075	0,41675
88 9 19 3 10 0	-0,06	0,000003	-0,0006	-0,0000026	0,0000008	0,000004	-0,00007	-0,001	0,000	0,086	0,45825
88 9 19 4 10 0	-0,04	0,000550	-0,0004	-0,0000023	0,0000007	0,000001	-0,00004	-0,001	-0,001	0,082	0,50000
88 9 19 5 10 0	-0,01	0,000147	-0,0001	-0,0000017	0,0000004	-0,000002	-0,00001	-0,001	0,000	0,062	0,54175
88 9 19 6 10 0	0,02	-0,000219	0,0000	-0,0000010	0,0000004	-0,000005	-0,00001	-0,001	0,000	0,051	0,58325
88 9 19 7 10 0	0,02	-0,000210	0,0002	-0,0000009	0,0000003	-0,000008	-0,00002	0,000	0,000	0,031	0,62500
88 9 19 8 10 0	0,01	-0,000125	0,0003	-0,0000007	0,0000001	-0,000009	-0,00003	0,000	0,000	0,015	0,66675
88 9 19 9 10 0	-0,01	0,000127	0,0002	-0,0000007	0,0000000	-0,000009	-0,00004	0,000	0,000	-0,011	0,70825
88 9 19 10 10 0	-0,03	0,000410	0,0002	-0,0000006	-0,0000003	-0,000007	-0,00004	0,000	0,000	-0,027	0,75000
88 9 19 11 10 0	-0,05	0,000699	0,0002	-0,0000003	-0,0000004	-0,000006	-0,00004	0,000	0,000	-0,047	0,79175
88 9 19 12 10 0	-0,06	0,000035	0,0001	-0,0000001	-0,0000005	-0,000004	-0,00003	0,000	0,000	-0,055	0,83325
88 9 19 13 10 0	-0,06	0,000778	0,0001	0,0000000	-0,0000005	-0,000003	-0,00002	0,000	0,000	-0,051	0,87500
88 9 19 14 10 0	-0,05	0,000678	0,0000	0,0000001	-0,0000005	-0,000003	-0,00001	-0,001	0,000	-0,036	0,91675
88 9 19 15 10 0	-0,03	0,000505	-0,0001	0,0000001	-0,0000007	-0,000001	0,00001	0,000	0,000	-0,020	0,95825
88 9 19 16 10 0	-0,02	0,000300	0,0001	0,0000002	-0,0000007	0,000001	0,00003	0,000	0,000	-0,012	1,00000

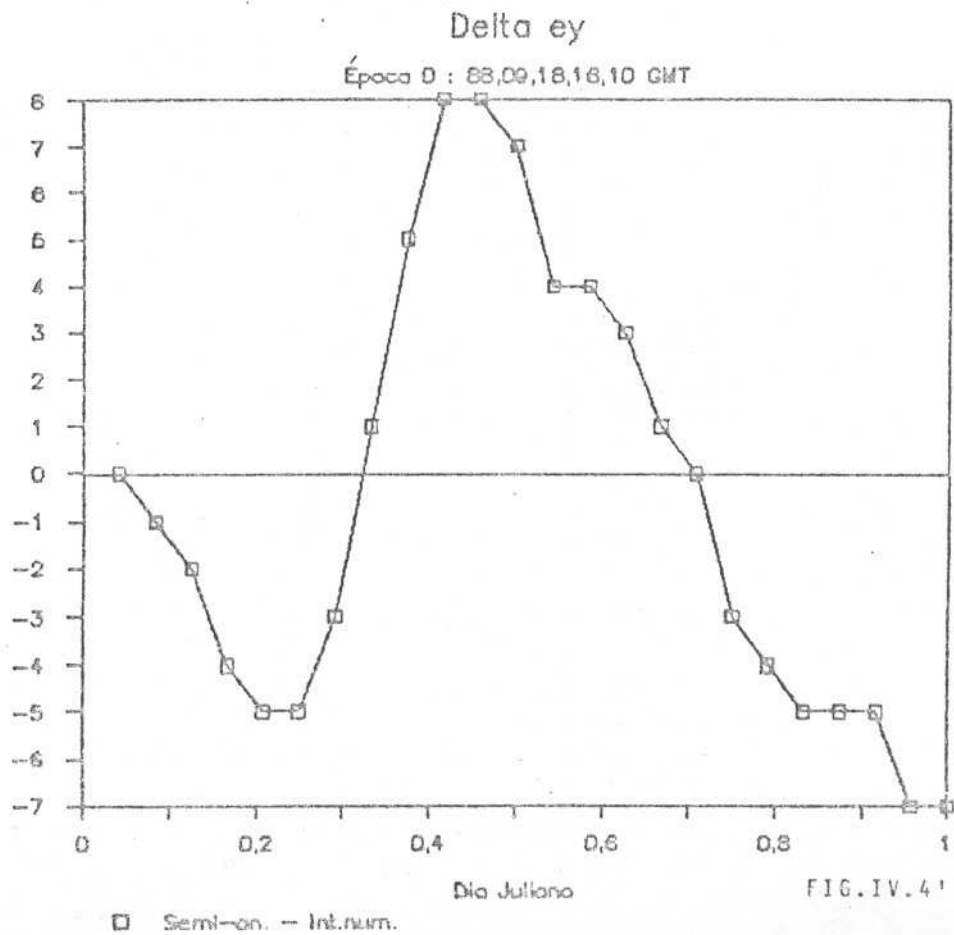


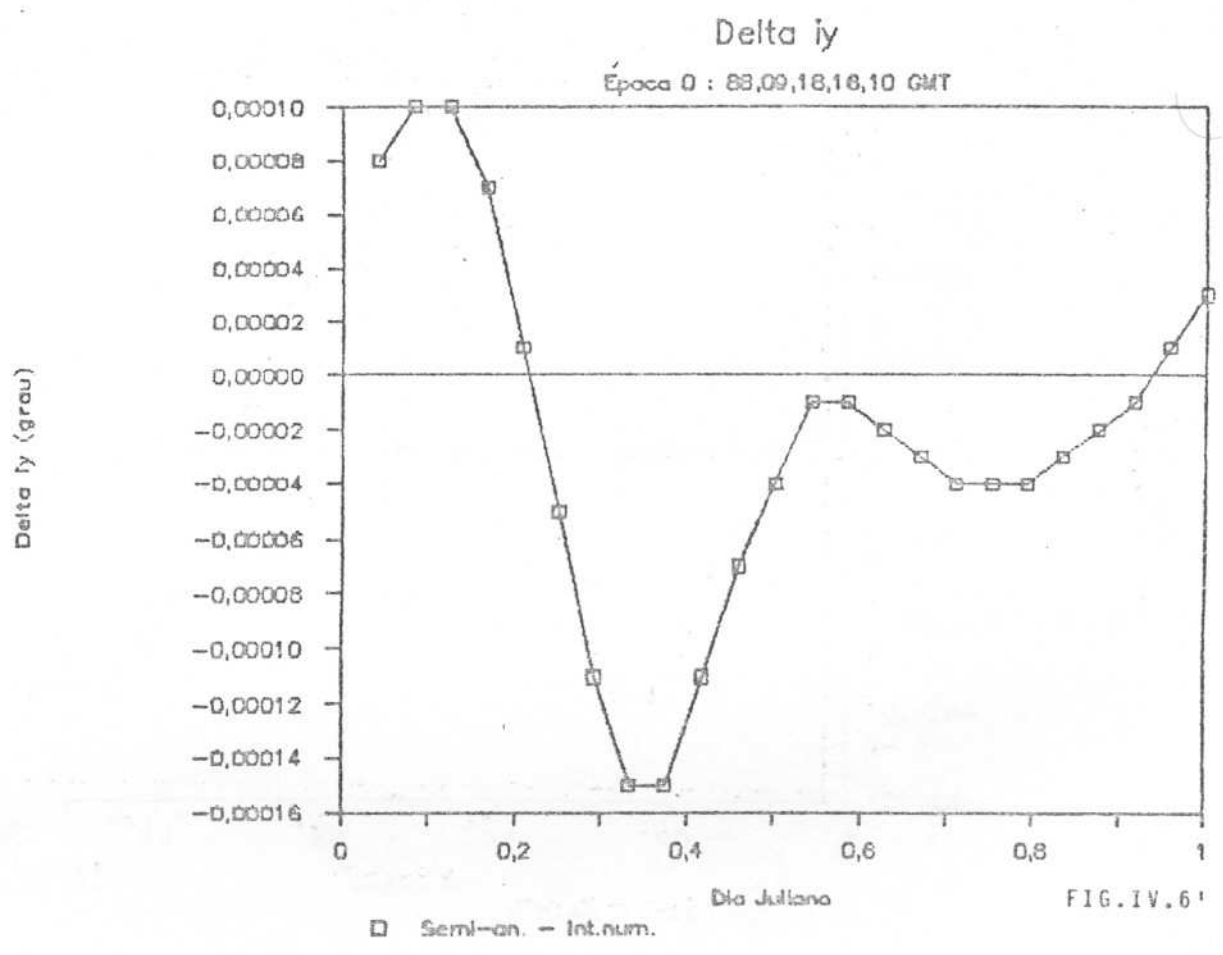
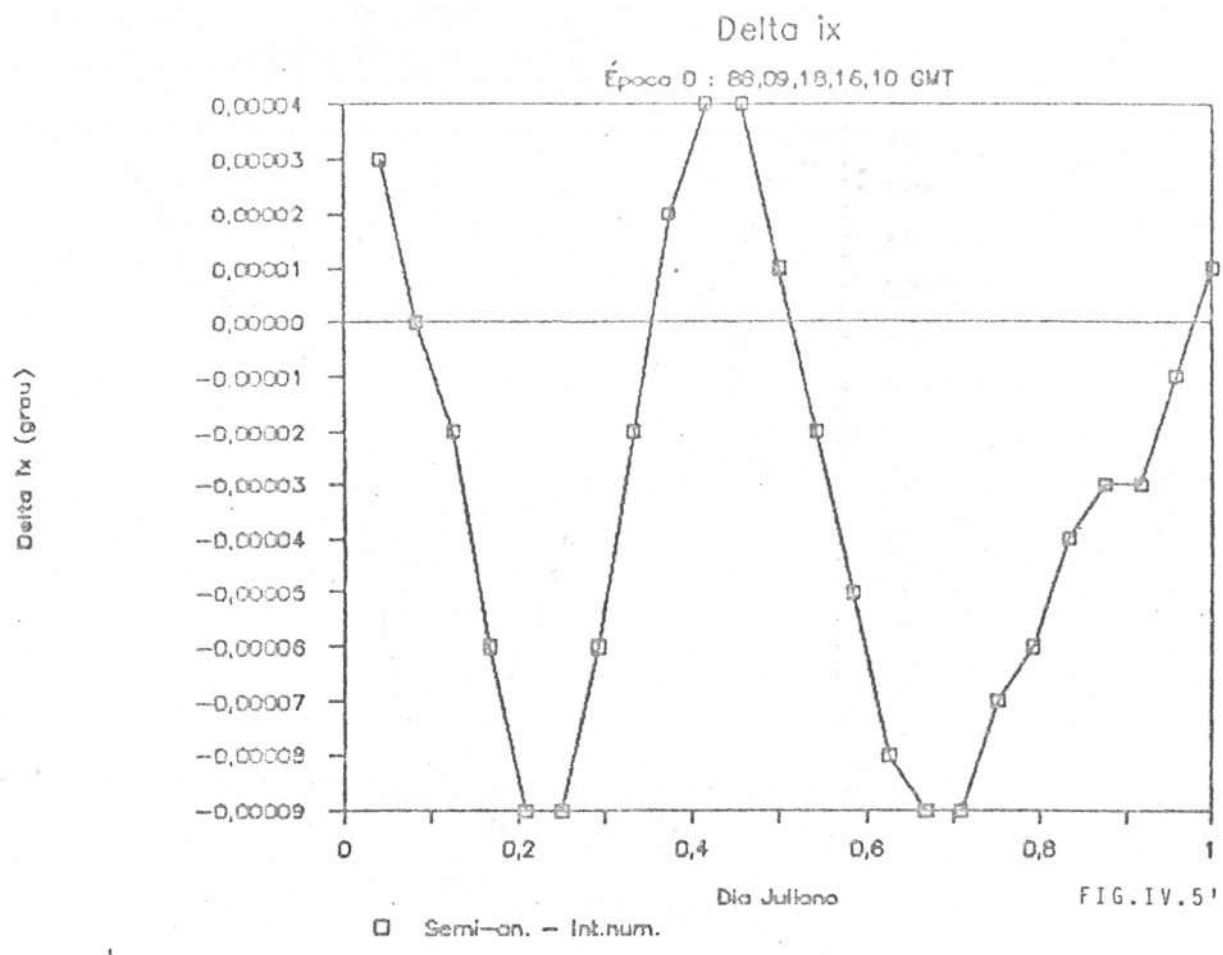


Delta ex x 1E+6

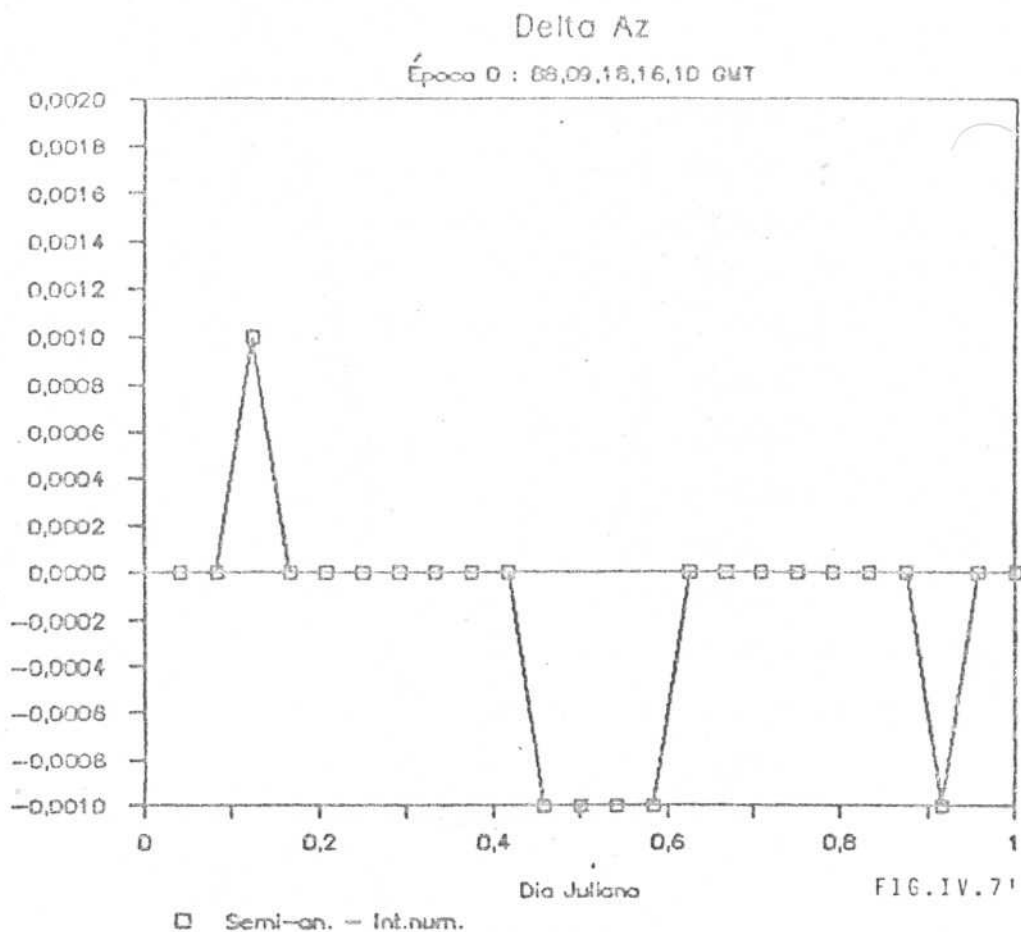


Delta ey x 1E+7

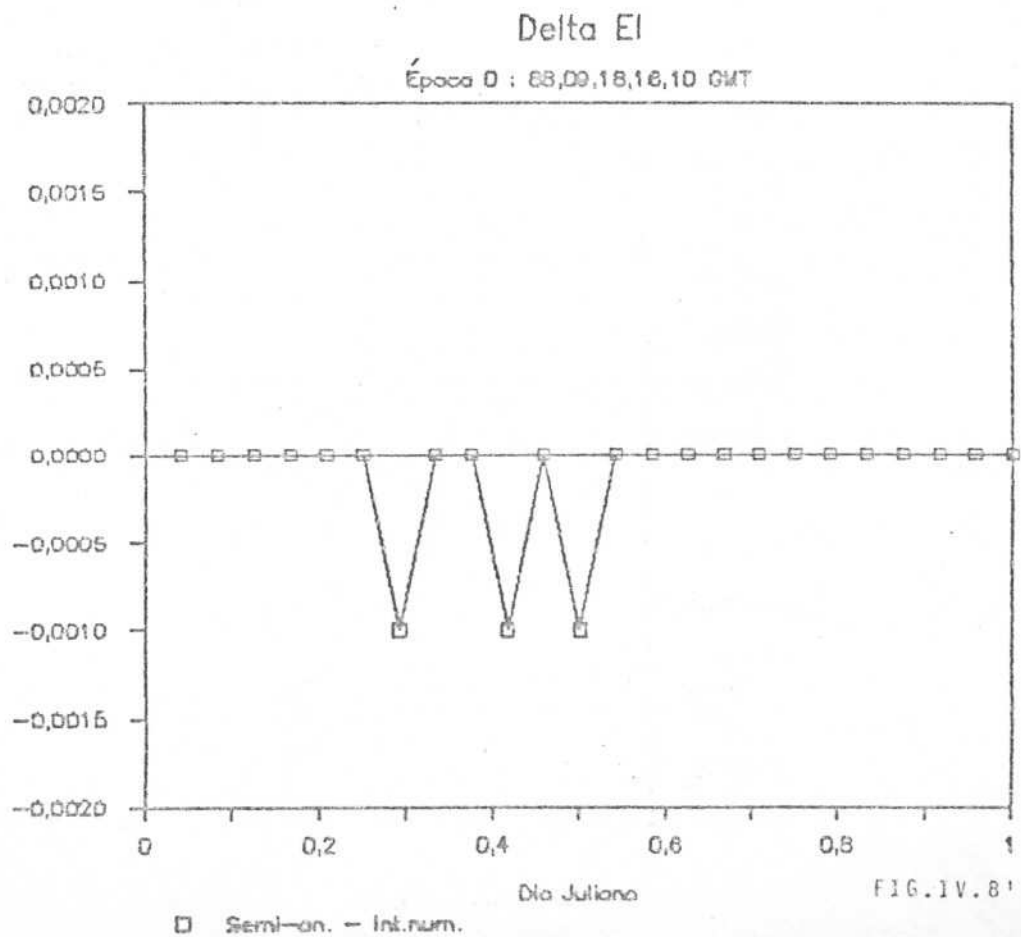




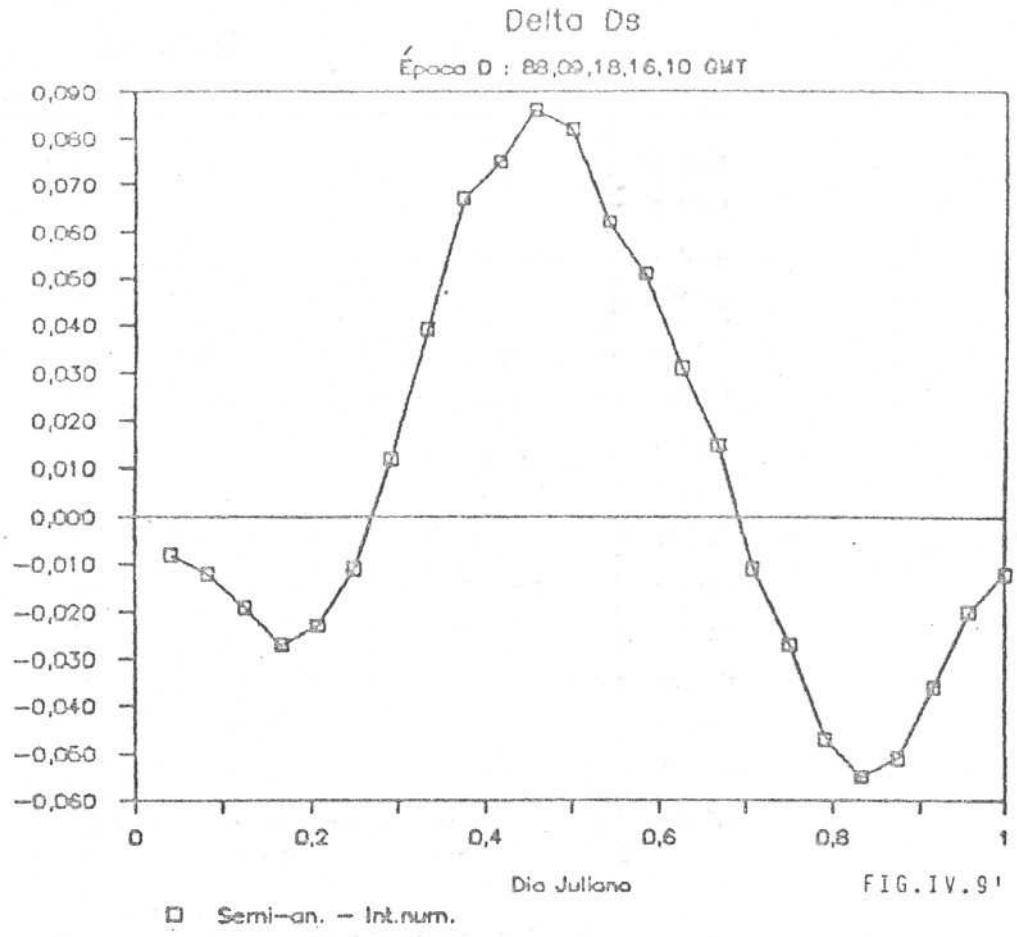
Delta Az (grau)



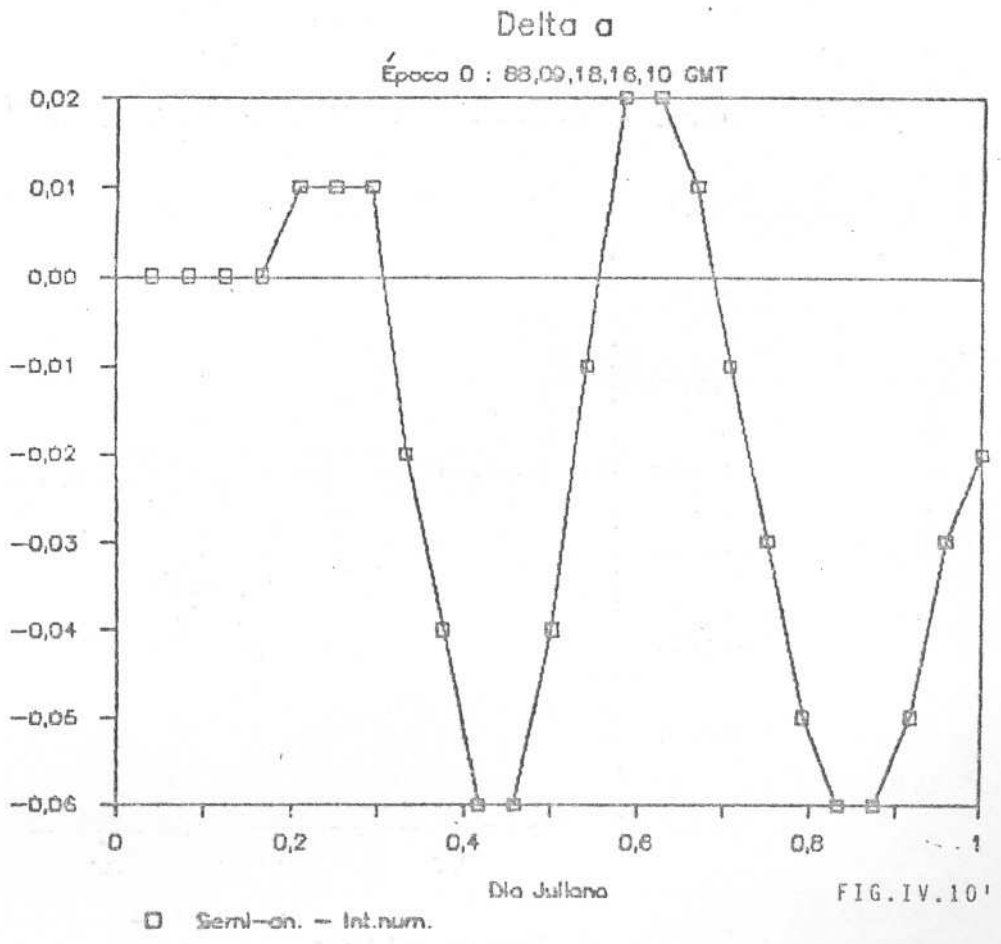
Delta EI (grau)



Delta D<sub>s</sub> (km)



Delta a (km)



#### IV.1.2 - Derivadas Parciais

As derivadas parciais das observações com os parâmetros a serem estimados ( $\lambda_i$ ) são obtidas de maneira analítica (apêndice I). A seguir são apresentados os valores encontrados em termos de intervalos de variação dentro do período de propagação considerado no item anterior.

Tabela IV.4 - Derivadas Parciais

	Az(grau)	El(grau)	Ds(ur <sub>t</sub> ) *
$\lambda_1$ (grau)	[1.470,1.473]	[.743,.744]	[.3848,.3878]
$\lambda_2$ (grau/dia)	[-.0006,-.0005]	-.0011	[-.6968,-.6967]
$\lambda_3$	[-2.94,2.94]	[-1.48,1.48]	[-5.98,5.96]
$\lambda_4$	[-2.93,2.93]	[-1.48,1.48]	[-6.12,6.22]
$\lambda_5$ (grau)	[-1.25,1.27]	[-.91,.86]	[-.44,.45]
$\lambda_6$ (grau)	[-1.26,1.24]	[-.86,.98]	[-.43,.45]
$\lambda_7$	0	0	0

#### IV.1.3 - Estimação da Órbita

A estimação da órbita com o procedimento proposto, para a época dada anteriormente, é feita para 4 conjuntos de observações (12 observações) em média a cada 2 horas aproximadamente, e são referentes ao satélite Brasilsat A1. A informação a priori do vetor de estado, bem como os erros desta são apresentados a seguir.

\* unidades do raio da terra (ur<sub>t</sub>)

Época: 88 09 18 16 10 GMT

$\lambda_1 = -65^{\circ}.01755$	$\delta\lambda_1 = 0^{\circ}.00037$
$\lambda_2 = 0.0152 \text{ graus/dia}$	$\delta\lambda_2 = 0.000025 \text{ graus/dia}$
$\lambda_3 = -0.0000846$	$\delta\lambda_3 = 0.00000222$
$\lambda_4 = 0.0000215$	$\delta\lambda_4 = 0.00000211$
$\lambda_5 = -0^{\circ}.030975$	$\delta\lambda_5 = 0^{\circ}.0000321$
$\lambda_6 = -0^{\circ}.02476$	$\delta\lambda_6 = 0^{\circ}.0000337$
$\lambda_7 = 0.017256 \text{ m}^2/\text{Kg}$	$\delta\lambda_7 = 0.058 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{Kg}$

As dispersões dos erros nos parâmetros  $\lambda_1$  a  $\lambda_6$  são tomadas como os desvios padrões destes elementos obtidos por uma determinação via mínimos quadrados. Para o sétimo parâmetro ela é calculada tomando como base a incerteza atual no conhecimento da massa que é de aproximadamente 3%.

A dispersão do ruído no estado ( $W_i$ ) para  $i=1, \dots, 6$ , representado por seu desvio padrão, é obtida através da diferença entre os modelos propagados semianalítica e numericamente tomando-se o valor máximo destas diferenças. Para o sétimo parâmetro a dispersão é obtida tomando como base a variação média da área em 24 hs. Desta forma

$$\sigma W_1 = 5 \times 10^{-4} \text{ graus}$$

$$\sigma W_2 = 5 \times 10^{-4} \text{ graus/dia}$$

$$\sigma W_3 = 2.5 \times 10^{-6}$$

$$\sigma W_4 = 7.5 \times 10^{-7}$$

$$\sigma W_5 = 1 \times 10^{-4} \text{ graus}$$

$$\sigma W_6 = 1.5 \times 10^{-4} \text{ graus}$$

$$\sigma W_7 = 0.001063 \text{ m}^2/\text{kg}$$

O ruído ( $v_j$ ) nas observações é dado pela incerteza da medida. Assim tem-se  $v_j$  para cada uma delas

$$3\sigma_{v_1}(\text{azimute})=.042^\circ$$

$$3\sigma_{v_2}(\text{elevação})=.042^\circ$$

$$3\sigma_{v_3}(\text{distância})=30 \text{ m}$$

A tabela IV.5 apresenta os valores observados menos o calculado (o-c) para cada instante de observação. As figuras IV.11 a IV.13 são os gráficos dos (o-c). A tabela IV.6 contém as órbitas estimadas para cada conjunto de observação processado. A órbita estimada através do método dos mínimos quadrados, o qual processa o conjunto inteiro de observações ao mesmo tempo, é dada abaixo e os resíduos (o-c) relacionados a esta estimação são dados nas figuras IV.14 a IV.16.

Época: 88 09 18 16 10 GMT

$$l=-65.01755^\circ$$

$$d=.0152^\circ/\text{dia}$$

$$e_x=-.0000846$$

$$e_y=.0000215$$

$$i_x=-.03097^\circ$$

$$i_y=.02476^\circ$$

ÉPOCA					Az (grau)	El (grau)	Ds (km)	Dt (dia)	
Valores Observados - Calculados (O-C)									
88	9	18	18	5	7	-0,005	0,003	0,045	0,08008
88	9	18	18	5	38	-0,001	0,002	-0,002	0,06032
88	9	18	18	6	8	-0,001	0,002	0,002	0,08057
88	9	18	18	6	37	-0,001	0,001	-0,002	0,08105
88	9	18	19	52	25	0,000	0,000	0,028	0,15454
88	9	18	19	52	55	0,001	0,000	-0,003	0,15479
88	9	18	19	53	24	0,001	0,000	0,003	0,15527
88	9	18	19	53	54	-0,001	-0,001	-0,004	0,15552
88	9	18	22	6	55	0,000	0,002	-0,038	0,24780
88	9	18	22	7	25	0,003	0,001	-0,006	0,24829
88	9	18	22	7	54	-0,002	0,000	0,002	0,24854
88	9	18	22	8	24	0,000	0,000	0,004	0,24902
88	9	19	0	1	9	-0,002	-0,001	-0,080	0,32715
88	9	19	0	1	39	0,001	0,000	0,000	0,32764
88	9	19	0	2	8	-0,001	0,000	0,008	0,32788
88	9	19	0	2	38	0,002	0,000	-0,007	0,32813
88	9	19	2	6	28	-0,001	-0,001	-0,103	0,41431
88	9	19	2	6	57	0,001	0,000	0,001	0,41455
88	9	19	2	7	27	0,001	0,001	0,001	0,41504
88	9	19	2	7	56	-0,001	0,000	0,002	0,41528
88	9	19	5	59	50	-0,006	0,002	-0,091	0,57642
88	9	19	6	0	19	-0,001	0,001	0,000	0,57666
88	9	19	6	0	49	-0,001	0,001	-0,002	0,57690
88	9	19	6	1	18	0,000	0,001	0,003	0,57739
88	9	19	8	12	37	-0,004	-0,001	-0,006	0,66846
88	9	19	8	13	6	0,001	0,000	-0,002	0,66895
88	9	19	8	13	36	-0,001	0,000	-0,005	0,66919
88	9	19	8	14	5	-0,001	0,000	0,005	0,66943
88	9	19	10	0	46	0,002	0,001	-0,009	0,74365
88	9	19	10	1	15	-0,001	0,000	0,000	0,74390
88	9	19	10	1	45	-0,001	0,000	-0,002	0,74438
88	9	19	10	2	14	0,001	0,000	0,006	0,74463
88	9	19	12	5	49	0,004	0,007	-0,036	0,83057
88	9	19	12	6	18	0,000	0,001	-0,003	0,83081
88	9	19	12	6	48	-0,001	0,001	-0,002	0,83105
88	9	19	12	7	17	0,001	0,000	0,004	0,83154
88	9	19	14	6	26	0,000	0,001	-0,049	0,91421
88	9	19	14	6	56	0,000	-0,001	0,003	0,91455
88	9	19	14	7	25	-0,001	0,000	-0,003	0,91479
88	9	19	14	7	55	-0,001	0,000	0,006	0,91528
88	9	19	16	10	10	0,001	0,007	-0,082	1,00024
88	9	19	16	10	39	-0,003	0,000	-0,001	1,00049
88	9	19	16	11	9	-0,002	0,000	0,000	1,00073
88	9	19	16	11	38	0,000	0,000	0,001	1,00122
88	9	19	18	11	0	-0,001	0,001	-0,032	1,08398
88	9	19	18	11	30	0,000	0,001	-0,004	1,08447
88	9	19	18	12	0	0,000	0,001	0,001	1,08472
88	9	19	18	12	29	0,001	0,002	0,002	1,08521
88	9	19	20	10	40	-0,004	-0,002	-0,050	1,16724
88	9	19	20	11	9	0,002	-0,001	0,001	1,16748
88	9	19	20	11	39	0,000	-0,001	0,000	1,16772
88	9	19	20	12	8	-0,001	-0,004	-0,001	1,16821
88	9	19	22	19	21	0,000	0,000	-0,003	1,25659
88	9	19	22	19	50	-0,002	0,000	-0,001	1,25684
88	9	19	22	20	20	-0,001	0,000	0,004	1,25732

TABELA IV.5 - (O-C)



ÉPOCA		Az(gra)	El(gra)	Ds(km)	Dt(dia)	
Valores Observados - Calculados (O-C)						
88	9 20	0 10 6	0,000	0,001	-0,004	1,33350
88	9 20	0 10 38	0,000	0,001	0,004	1,33374
88	9 20	0 11 7	-0,002	0,001	-0,003	1,33423
88	9 20	2 0 9	0,000	0,000	-0,002	1,40991
88	9 20	2 0 39	-0,001	0,001	0,001	1,41016
88	9 20	2 1 8	0,001	0,001	-0,001	1,41064
88	9 20	6 3 13	-0,001	0,000	0,001	1,57861
88	9 20	6 3 42	0,000	0,000	0,000	1,57910
88	9 20	6 4 11	0,000	0,000	-0,001	1,57935
88	9 20	8 9 53	-0,002	-0,001	-0,022	1,66650
88	9 20	8 10 23	0,000	0,000	-0,004	1,66699
88	9 20	8 10 52	0,000	0,000	0,003	1,66724
88	9 20	8 11 22	-0,001	0,000	0,004	1,66772
88	9 20	10 1 45	0,001	0,000	0,013	1,74438
88	9 20	10 2 14	-0,001	0,001	-0,005	1,74463
88	9 20	10 2 44	0,001	0,000	0,006	1,74487
88	9 20	10 3 13	0,000	0,000	-0,003	1,74536
88	9 20	11 57 29	0,000	0,000	0,041	1,82471
88	9 20	11 57 59	-0,001	0,001	0,004	1,82495
88	9 20	11 58 29	0,001	0,002	-0,004	1,82544
88	9 20	11 58 59	0,002	0,001	0,000	1,82568
88	9 20	14 10 55	0,003	0,000	0,036	1,91724
88	9 20	14 11 24	0,000	0,000	0,000	1,91772
88	9 20	14 11 54	0,001	0,000	0,003	1,91797
88	9 20	14 12 23	0,002	-0,001	0,000	1,91846
88	9 20	16 5 46	0,002	0,005	-0,020	1,99707
88	9 20	16 6 15	0,000	0,001	0,000	1,99731
88	9 20	16 6 45	0,001	0,002	-0,002	1,99780
88	9 20	16 7 15	-0,001	0,001	0,006	1,99805
88	9 20	18 8 56	-0,002	-0,003	0,019	2,08252
88	9 20	18 9 25	0,000	-0,001	0,003	2,08301
88	9 20	18 9 54	0,000	0,000	-0,001	2,08325
88	9 20	18 10 24	-0,001	0,002	0,007	2,08374

CONT. TABELA IV.5 - (O-C)

### Azimute (O-C)

Época 0 : 88,06,18,16,10 GMT

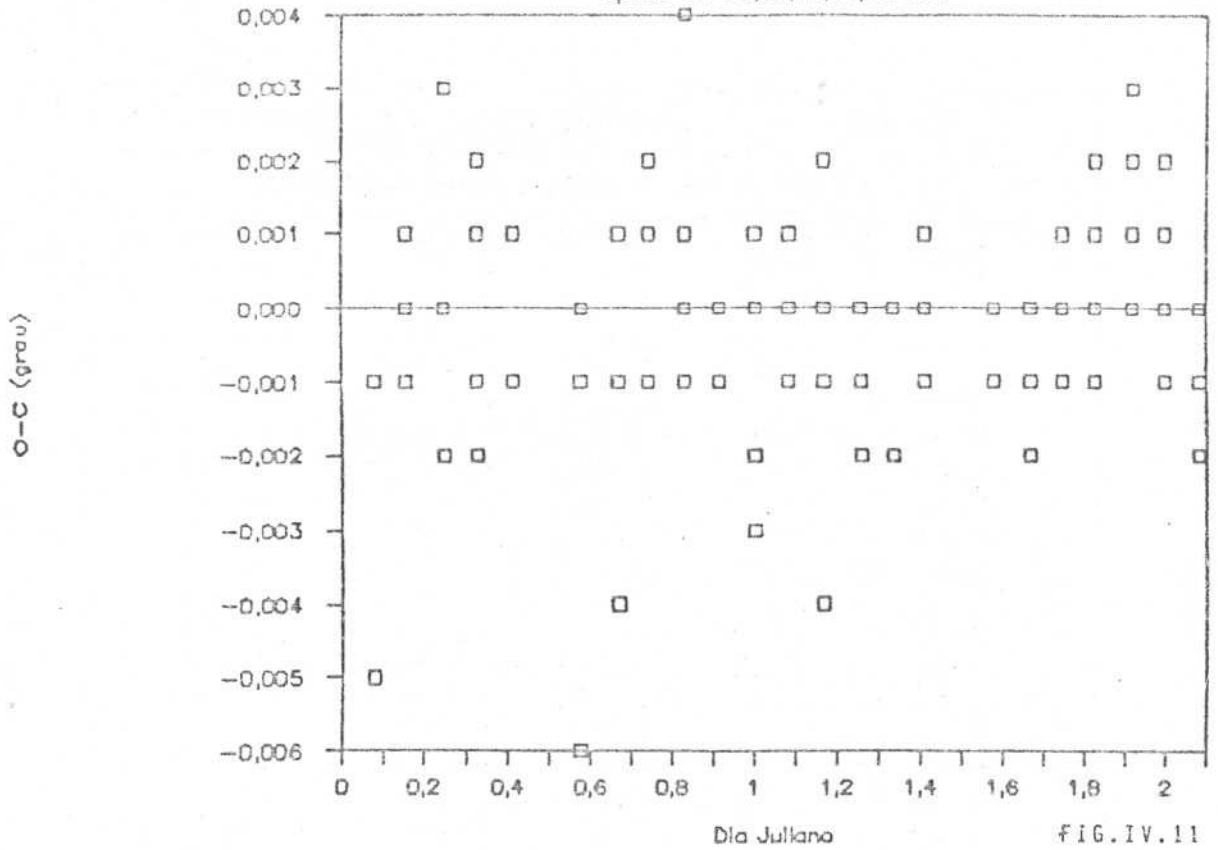


FIG. IV.11

### Elevação (O-C)

Época 0 : 88,06,18,16,10 GMT

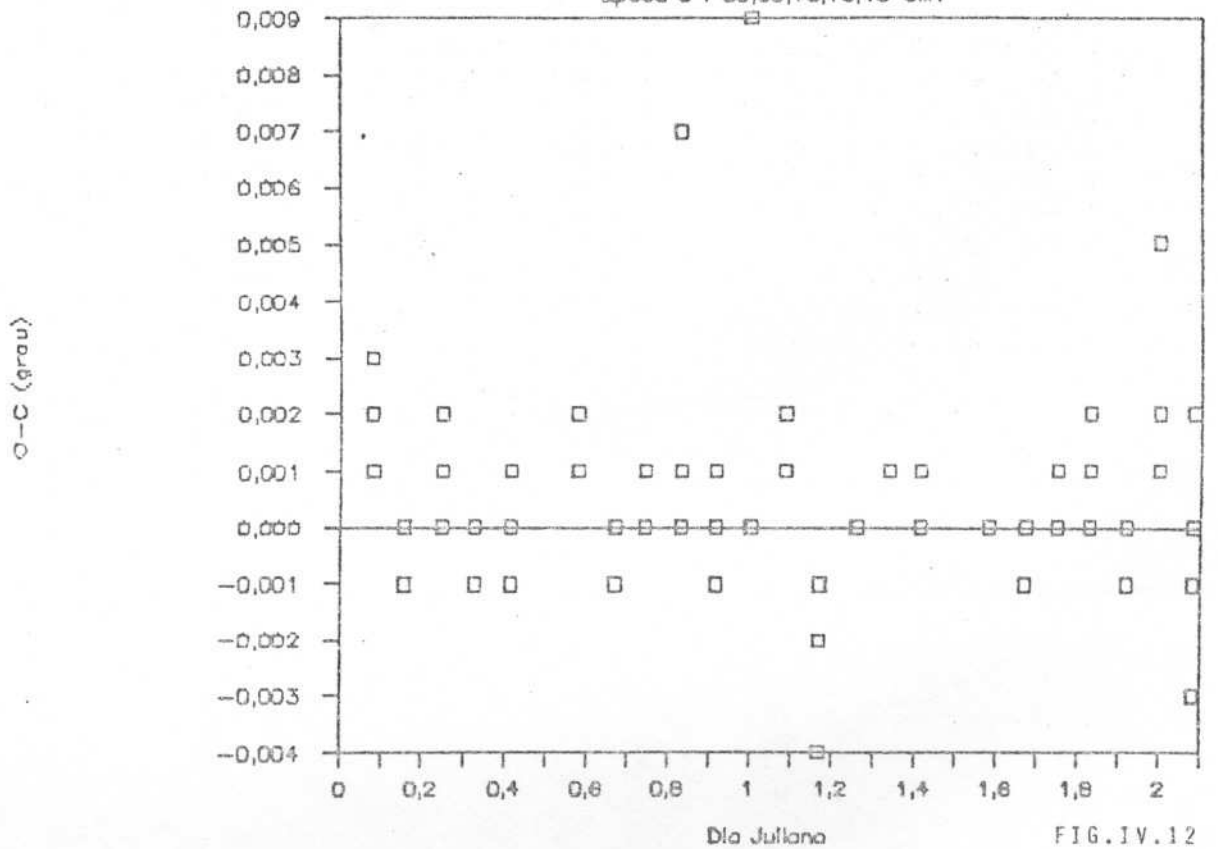


FIG. IV.12

ÉPOCA	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
88 9 18 18 5 7	-65,0184	0,014586	-0,0000846	0,0000218	-0,03087	-0,024971	0,01726
88 9 18 18 5 39	-65,0188	0,014644	-0,0000846	0,0000215	-0,03077	-0,025303	0,01725
88 9 18 18 6 8	-65,0190	0,014518	-0,0000846	0,0000215	-0,03066	-0,025677	0,01726
88 9 18 18 6 37	-65,0193	0,014250	-0,0000846	0,0000216	-0,03056	-0,026024	0,01725
88 9 18 19 52 25	-65,0192	0,013007	-0,0000843	0,0000215	-0,03042	-0,026176	0,01725
88 9 18 19 52 55	-65,0190	0,013174	-0,0000843	0,0000215	-0,03035	-0,026250	0,01726
88 9 18 19 53 24	-65,0187	0,013442	-0,0000842	0,0000215	-0,03033	-0,026281	0,01726
88 9 18 19 53 54	-65,0189	0,013605	-0,0000845	0,0000215	-0,03032	-0,026299	0,01725
88 9 18 22 6 55	-65,0187	0,013416	-0,0000846	0,0000215	-0,02990	-0,026181	0,01726
88 9 18 22 7 25	-65,0201	0,013083	-0,0000846	0,0000215	-0,02987	-0,026233	0,01726
88 9 18 22 7 54	-65,0203	0,012903	-0,0000845	0,0000215	-0,02962	-0,026200	0,01726
88 9 18 22 8 24	-65,0214	0,012736	-0,0000844	0,0000217	-0,02942	-0,026182	0,01726
88 9 19 0 1 9	-65,0204	0,013723	-0,0000843	0,0000215	-0,02925	-0,025721	0,01725
88 9 19 0 1 39	-65,0198	0,013770	-0,0000848	0,0000216	-0,02923	-0,025674	0,01726
88 9 19 0 2 8	-65,0190	0,013814	-0,0000847	0,0000215	-0,02915	-0,025580	0,01725
88 9 19 0 2 38	-65,0194	0,013747	-0,0000849	0,0000213	-0,02923	-0,025663	0,01726
88 9 19 2 6 28	-65,0189	0,014980	-0,0000846	0,0000215	-0,02933	-0,025488	0,01727
88 9 19 2 6 57	-65,0188	0,014927	-0,0000846	0,0000215	-0,02938	-0,025671	0,01725
88 9 19 2 7 27	-65,0191	0,014848	-0,0000846	0,0000215	-0,02939	-0,025754	0,01726
88 9 19 2 7 56	-65,0190	0,014867	-0,0000846	0,0000215	-0,02938	-0,025700	0,01725
88 9 19 5 59 50	-65,0198	0,012144	-0,0000846	0,0000215	-0,03030	-0,024590	0,01726
88 9 19 6 0 19	-65,0195	0,012522	-0,0000846	0,0000218	-0,03055	-0,024211	0,01725
88 9 19 6 0 49	-65,0190	0,013060	-0,0000846	0,0000215	-0,03076	-0,023770	0,01726
88 9 19 6 1 18	-65,0189	0,013294	-0,0000846	0,0000215	-0,03088	-0,023502	0,01726
88 9 19 8 12 37	-65,0188	0,013048	-0,0000845	0,0000215	-0,03145	-0,023434	0,01726
88 9 19 8 13 6	-65,0206	0,011533	-0,0000846	0,0000216	-0,03160	-0,023395	0,01726
88 9 19 8 13 36	-65,0203	0,012532	-0,0000846	0,0000215	-0,03174	-0,023318	0,01725
88 9 19 8 14 5	-65,0198	0,011392	-0,0000847	0,0000215	-0,03189	-0,023210	0,01726
88 9 19 10 0 46	-65,0184	0,015503	-0,0000846	0,0000215	-0,03191	-0,023202	0,01726
88 9 19 10 1 15	-65,0179	0,015594	-0,0000846	0,0000215	-0,03202	-0,023243	0,01725
88 9 19 10 1 45	-65,0180	0,015632	-0,0000849	0,0000217	-0,03217	-0,023276	0,01726
88 9 19 10 2 14	-65,0181	0,015521	-0,0000846	0,0000215	-0,03217	-0,023270	0,01726
88 9 19 12 5 49	-65,0186	0,014164	-0,0000846	0,0000215	-0,03273	-0,023743	0,01726
88 9 19 12 6 18	-65,0188	0,013758	-0,0000846	0,0000216	-0,03302	-0,023990	0,01725
88 9 19 12 6 48	-65,0187	0,013314	-0,0000844	0,0000215	-0,03330	-0,024318	0,01726
88 9 19 12 7 17	-65,0192	0,012909	-0,0000846	0,0000215	-0,03345	-0,024474	0,01725
88 9 19 14 6 26	-65,0185	0,014243	-0,0000846	0,0000215	-0,03152	-0,025055	0,01726
88 9 19 14 6 56	-65,0183	0,014921	-0,0000846	0,0000215	-0,03155	-0,025207	0,01724
88 9 19 14 7 25	-65,0184	0,014244	-0,0000846	0,0000215	-0,03139	-0,025422	0,01726
88 9 19 14 7 55	-65,0186	0,014950	-0,0000846	0,0000215	-0,03166	-0,025670	0,01725
88 9 19 16 10 10	-65,0169	0,014721	-0,0000846	0,0000215	-0,03036	-0,027440	0,01726
88 9 19 16 10 39	-65,0162	0,014368	-0,0000846	0,0000215	-0,03098	-0,028235	0,01726
88 9 19 16 11 9	-65,0161	0,014632	-0,0000846	0,0000215	-0,03089	-0,028734	0,01726
88 9 19 16 11 38	-65,0159	0,014137	-0,0000846	0,0000215	-0,03084	-0,029080	0,01725
88 9 19 18 11 0	-65,0177	0,015054	-0,0000846	0,0000215	-0,03121	-0,029650	0,01726
88 9 19 18 11 30	-65,0176	0,014973	-0,0000846	0,0000215	-0,03191	-0,024693	0,01726
88 9 19 18 12 0	-65,0171	0,015543	-0,0000846	0,0000215	-0,03162	-0,024507	0,01726
88 9 19 18 12 29	-65,0163	0,014973	-0,0000846	0,0000215	-0,03140	-0,024810	0,01725
88 9 19 20 10 40	-65,0168	0,014662	-0,0000846	0,0000215	-0,03088	-0,024754	0,01726
88 9 19 20 11 9	-65,0164	0,014753	-0,0000846	0,0000215	-0,03087	-0,024720	0,01725
88 9 19 20 11 39	-65,0158	0,014863	-0,0000846	0,0000215	-0,03101	-0,024856	0,01726
88 9 19 20 12 8	-65,0168	0,014959	-0,0000846	0,0000215	-0,03137	-0,025470	0,01725
88 9 19 22 18 52	-65,0186	0,015946	-0,0000845	0,0000217	-0,03084	-0,024840	0,01726
88 9 19 22 19 21	-65,0185	0,015349	-0,0000845	0,0000215	-0,03078	-0,024700	0,01725
88 9 19 22 19 50	-65,0189	0,015791	-0,0000845	0,0000215	-0,03060	-0,026620	0,01725
88 9 19 22 20 20	-65,0184	0,015840	-0,0000845	0,0000215	-0,03049	-0,025532	0,01726
88 9 20 0 10 6	-65,0178	0,014754	-0,0000845	0,0000215	-0,03050	-0,024520	0,01727
88 9 20 0 10 38	-65,0175	0,014639	-0,0000845	0,0000215	-0,02989	-0,024737	0,01726
88 9 20 0 11 7	-65,0172	0,014458	-0,0000845	0,0000216	-0,02997	-0,024812	0,01726
88 9 20 2 0 9	-65,0180	0,015180	-0,0000845	0,0000216	-0,02962	-0,024608	0,01726
88 9 20 2 0 39	-65,0183	0,015479	-0,0000845	0,0000216	-0,02994	-0,024803	0,01725
88 9 20 2 1 8	-65,0175	0,015097	-0,0000845	0,0000216	-0,03050	-0,024640	0,01726
88 9 20 6 3 13	-65,0181	0,015736	-0,0000845	0,0000215	-0,03102	-0,024740	0,01725
88 9 20 6 3 42	-65,0176	0,015233	-0,0000845	0,0000216	-0,03110	-0,024580	0,01726
88 9 20 6 4 11	-65,0169	0,015932	-0,0000845	0,0000216	-0,03114	-0,024603	0,01726
88 9 20 8 9 53	-65,0188	0,016131	-0,0000845	0,0000216	-0,03107	-0,024712	0,01725
88 9 20 8 10 23	-65,0186	0,016005	-0,0000845	0,0000216	-0,03100	-0,024704	0,01726
88 9 20 8 10 52	-65,0182	0,016251	-0,0000844	0,0000216	-0,03087	-0,024694	0,01727
88 9 20 8 11 22	-65,0181	0,015930	-0,0000845	0,0000214	-0,03083	-0,024686	0,01725
88 9 20 10 1 45	-65,0182	0,015084	-0,0000845	0,0000216	-0,03093	-0,024705	0,01726
88 9 20 10 2 14	-65,0183	0,015688	-0,0000845	0,0000216	-0,03068	-0,024698	0,01725
88 9 20 10 2 44	-65,0185	0,016143	-0,0000845	0,0000216	-0,03092	-0,024680	0,01726
88 9 20 10 3 13	-65,0187	0,016036	-0,0000845	0,0000213	-0,03108	-0,024600	0,01726
88 9 20 11 57 29	-65,0183	0,016121	-0,0000846	0,0000216	-0,03107	-0,024733	0,01726
88 9 20 11 57 59	-65,0186	0,016031	-0,0000845	0,0000216	-0,03082	-0,024740	0,01725
88 9 20 11 58 29	-65,0182	0,015857	-0,0000845	0,0000216	-0,03102	-0,024780	0,01726
88 9 20 11 58 59	-65,0184	0,015906	-0,0000845	0,0000216	-0,03078	-0,024752	0,01725
88 9 20 14 10 55	-65,0181	0,014943	-0,0000845	0,0000216	-0,02993	-0,024750	0,01726
88 9 20 14 11 24	-65,0179	0,015309	-0,0000845	0,0000217	-0,03040	-0,024630	0,01726
88 9 20 14 11 54	-65,0172	0,015122	-0,0000845	0,0000217	-0,03057	-0,024727	0,01727
88 9 20 14 12 23	-65,0179	0,015038	-0,0000845	0,0000217	-0,03106	-0,024975	0,01726
88 9 20 16 5 46	-65,0177	0,015332	-0,0000845	0,0000217	-0,03102	-0,024791	0,01726
88 9 20 16 6 45	-65,0183	0,014655	-0,0000847	0,0000215	-0,03101	-0,024791	0,01725
88 9 20 16 7 15	-65,0178	0,014802	-0,0000845	0,0000217	-0,03081	-0,024730	0,01726
88 9 20 18 8 56	-65,0181	0,014631	-0,0000845	0,0000215	-0,03053	-0,024693	0,01725
88 9 20 18 9 25	-65,0174	0,014867	-0,0000845	0,0000217	-0,03087	-0,024800	0,01726
88 9 20 18 9 54	-65,0179	0,014968	-0,0000845	0,0000217	-0,03101	-0,024724	0,01725
88 9 20 18 10 24	-65,0182	0,015031	-0,0000845	0,0000217	-0,03090	-0,024680	0,01726

TABELA IV.6 - VETOR ESTADO

FIG. IV-14

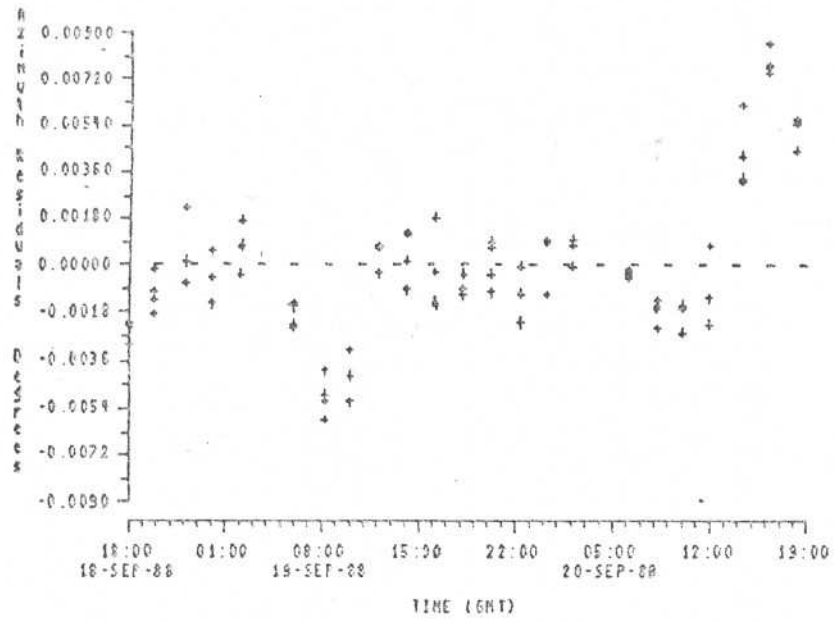


FIG. IV-15

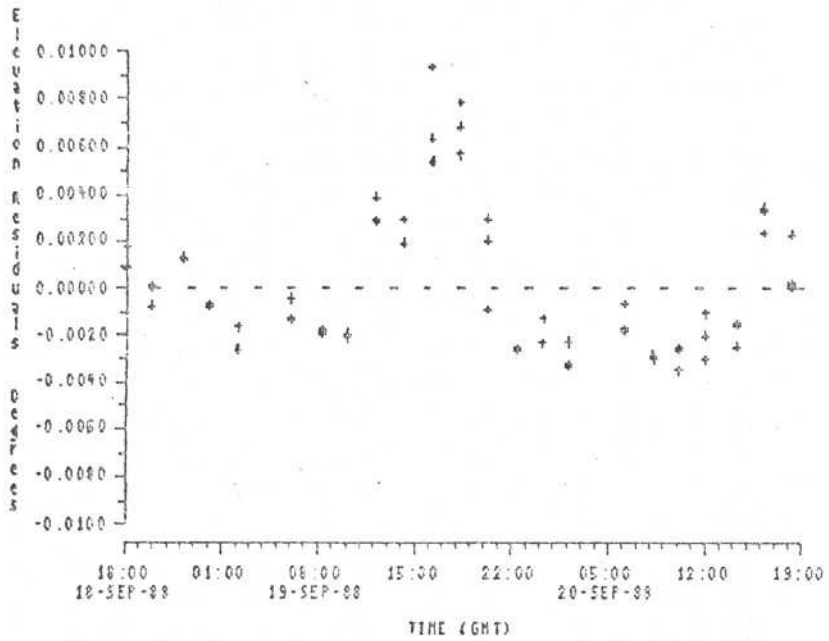
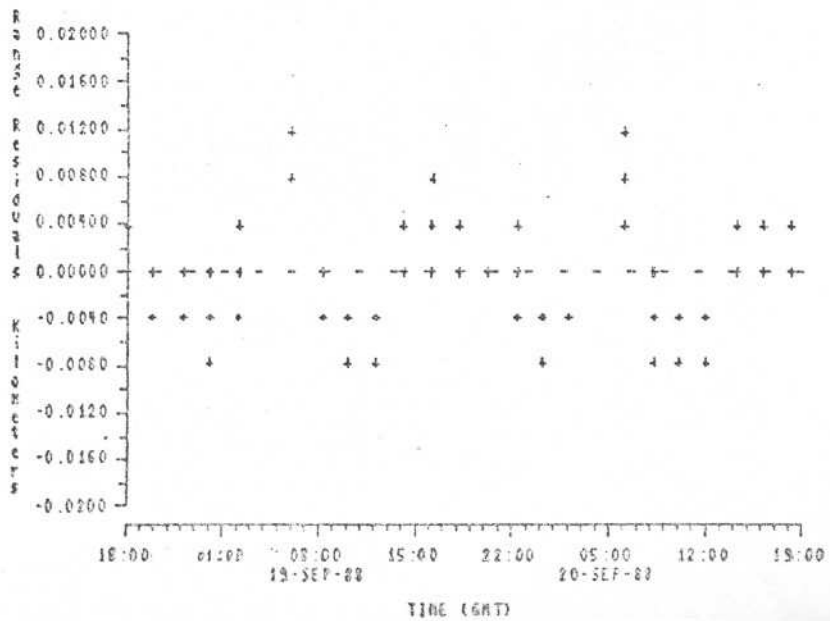


FIG. IV-16



#### IV.1.4 - Estimação da Órbita Pós-Manobra

A órbita planejada após uma manobra de inclinação é tomada como o valor a priori para a estimação. A incerteza utilizada para inicializar o estimador através de uma matriz de covariância diagonal é tomada como os desvios padrões ( $\delta\lambda_i$ ) representativos da ordem de grandeza de erros típicos para a manobra considerada. Os erros do modelo são os mesmos considerados anteriormente.

Época Inicial: 88,10,25,07,53,12 GMT

$\lambda_1 = -65.03712^\circ$	$\delta\lambda_1 = .011^\circ$
$\lambda_2 = -.00321^\circ/\text{dia}$	$\delta\lambda_2 = .0001^\circ/\text{dia}$
$\lambda_3 = -.0000025$	$\delta\lambda_3 = .0000022$
$\lambda_4 = -.0001313$	$\delta\lambda_4 = .0000020$
$\lambda_5 = -.025003^\circ$	$\delta\lambda_5 = .001^\circ$
$\lambda_6 = -.061588^\circ$	$\delta\lambda_6 = .005^\circ$
$\lambda_7 = .017309 \text{ m}^2/\text{kg}$	$\delta\lambda_7 = .058 \times 10^{-3} \text{ m}^2/\text{kg}$

A tabela IV.5' apresenta os valores observados menos os calculados e as figuras IV.11' a IV.13' são os gráficos destes resíduos (o-c). A tabela IV.6' são os valores estimados para o vetor estado.

A órbita estimada por mínimos quadrados para a época acima é dada abaixo e os resíduos relacionados a esta são dados nas figuras IV.14' a IV.16'.

$l = -65.02648^\circ$	$e_x = -.00000275$	$i_x = -.026211^\circ$
$d = 0.004^\circ / \text{dia}$	$e_y = -.000133412$	$i_y = .0668899^\circ$

ÉPOCA		Az(gra)	El(gra)	Ds(km)	Dt(dia)
Valores Observados - Calculados (O-C)					
88 10 25 9 6 14	0,000	0,002	-0,050	0,05078	
88 10 25 9 6 43	0,000	0,007	0,074	0,05103	
88 10 25 9 7 13	0,000	0,001	-0,002	0,05151	
88 10 25 11 9 49	0,002	0,098	-0,006	0,13647	
88 10 25 11 10 19	-0,001	0,003	-0,028	0,13696	
88 10 25 11 10 48	0,000	0,005	-0,030	0,13721	
88 10 25 11 11 18	0,001	0,001	-0,070	0,13745	
88 10 25 13 4 2	0,000	-0,001	0,049	0,21582	
88 10 25 13 4 31	0,001	0,000	-0,003	0,21631	
88 10 25 13 5 1	-0,001	0,000	0,005	0,21655	
88 10 25 13 5 30	0,000	0,000	-0,002	0,21680	
88 10 25 15 11 19	-0,003	-0,001	-0,034	0,30420	
88 10 25 15 11 49	-0,002	-0,001	0,023	0,30469	
88 10 25 15 12 18	0,000	0,000	0,007	0,30493	
88 10 25 15 12 47	0,000	0,001	0,000	0,30518	
88 10 25 17 10 15	0,000	0,002	-0,049	0,38672	
88 10 25 17 10 45	0,000	0,001	-0,008	0,38721	
88 10 25 17 11 14	0,000	0,000	-0,010	0,38745	
88 10 25 19 8 34	-0,002	0,000	0,004	0,46899	
88 10 25 19 9 3	0,002	0,001	-0,002	0,46924	
88 10 25 19 9 33	0,001	0,000	-0,006	0,46973	
88 10 25 21 8 56	-0,001	-0,002	0,052	0,55249	
88 10 25 21 9 26	0,000	-0,001	0,010	0,55298	
88 10 26 0 55 17	-0,001	0,000	0,011	0,70972	
88 10 26 0 55 46	-0,001	0,000	-0,010	0,71021	
88 10 26 0 56 16	0,001	0,000	0,001	0,71045	
88 10 26 3 0 19	-0,001	0,000	0,004	0,79663	
88 10 26 3 0 48	-0,001	0,000	0,002	0,79688	
88 10 26 3 1 18	-0,001	0,000	0,007	0,79736	
88 10 26 3 1 48	0,001	0,000	0,002	0,79761	
88 10 26 5 4 20	0,001	0,000	0,007	0,88281	
88 10 26 5 4 49	0,000	0,000	-0,001	0,88306	
88 10 26 5 5 19	0,000	0,000	0,006	0,88330	
88 10 26 5 5 48	-0,001	0,000	-0,006	0,88379	
88 10 26 6 51 51	0,003	0,004	-0,002	0,95728	
88 10 26 6 52 21	0,001	0,000	-0,042	0,95776	
88 10 26 9 12 19	0,000	0,000	0,001	1,05493	
88 10 26 9 12 48	0,001	-0,001	-0,001	1,05518	
88 10 26 11 12 5	0,002	-0,001	0,105	1,13818	
88 10 26 11 12 35	0,002	0,000	-0,006	1,13843	
88 10 26 11 13 4	-0,001	0,000	0,009	1,13892	
88 10 26 11 13 33	0,000	0,000	0,003	1,13916	
88 10 26 13 9 4	0,003	-0,003	0,065	1,21924	
88 10 26 13 9 33	-0,001	-0,001	0,003	1,21973	
88 10 26 13 10 3	0,001	-0,001	-0,010	1,21997	
88 10 26 13 10 32	-0,001	-0,001	0,002	1,22046	
88 10 26 15 6 2	-0,003	0,003	0,003	1,30054	
88 10 26 15 6 31	0,003	0,002	-0,008	1,30103	
88 10 26 15 7 0	-0,001	0,001	-0,010	1,30127	
88 10 26 15 7 30	0,000	0,000	-0,025	1,30151	
88 10 26 17 24 42	0,000	0,001	-0,001	1,39697	
88 10 26 17 25 11	0,000	0,001	-0,002	1,39722	
88 10 26 19 35 15	0,003	-0,001	-0,009	1,48755	
88 10 26 19 35 44	-0,002	-0,002	0,093	1,48779	
88 10 26 19 36 13	-0,001	-0,001	0,000	1,48828	

TABELA IV.5' - (O-C) PÓS-MANOBRA

+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+										
ÉPOCA						Az(gra)	El(gra)	Ds(km)	Dt(dia)	
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+										
Valores Observados - Calculados (O-C)										
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+										
88	10	26	19	36	43	-0,001	0,000	0,006	1,48853	
88	10	26	23	9	17	-0,001	-0,001	0,051	1,63623	
88	10	26	23	9	47	0,000	0,000	0,002	1,63647	
88	10	27	1	0	51	0,002	0,007	-0,004	1,71362	
88	10	27	1	1	52	0,003	0,003	-0,050	1,71436	
88	10	27	1	2	21	0,003	0,002	-0,001	1,71460	
88	10	27	2	54	29	0,000	0,000	-0,049	1,79248	
88	10	27	2	54	59	0,000	0,000	0,006	1,79297	
88	10	27	2	55	28	0,003	0,002	-0,003	1,79321	
88	10	27	2	55	58	0,001	0,000	-0,012	1,79370	
88	10	27	5	0	23	-0,007	0,000	-0,049	1,87988	
88	10	27	5	1	21	0,002	0,001	-0,003	1,88062	
88	10	27	5	1	51	0,000	0,000	0,010	1,88110	
88	10	27	7	5	14	-0,006	-0,001	-0,092	1,96680	
88	10	27	7	6	13	0,003	0,001	-0,008	1,96729	
88	10	27	7	6	43	0,001	0,001	-0,002	1,96777	
+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+-----+										

CONT. TABELA IV.5' - (O-C) PÓS-MANOBRA

### Azimute (O-C)

Época 0 : 88,10,25,07,53,12 GMT

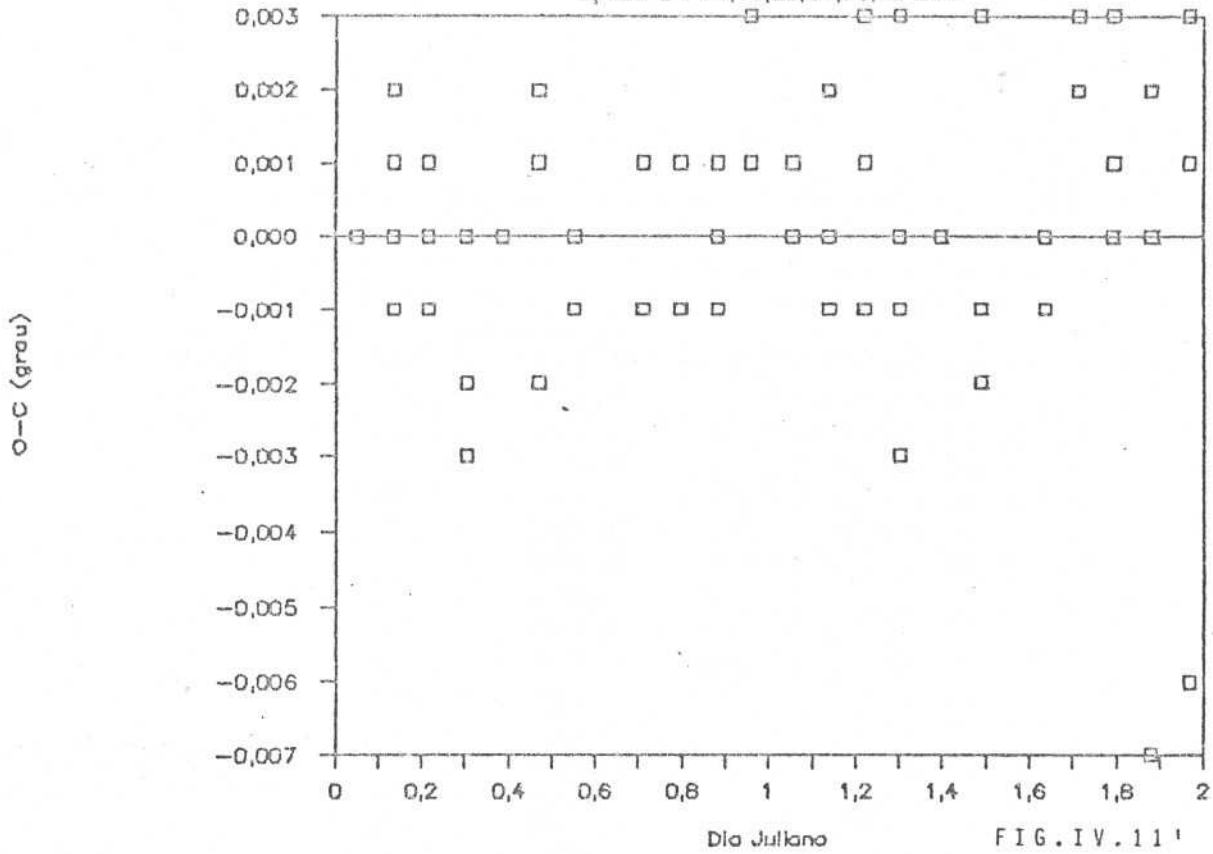


FIG. IV. 11'

### Elevação (O-C)

Época 0 : 88,10,25,7,53,12 GMT

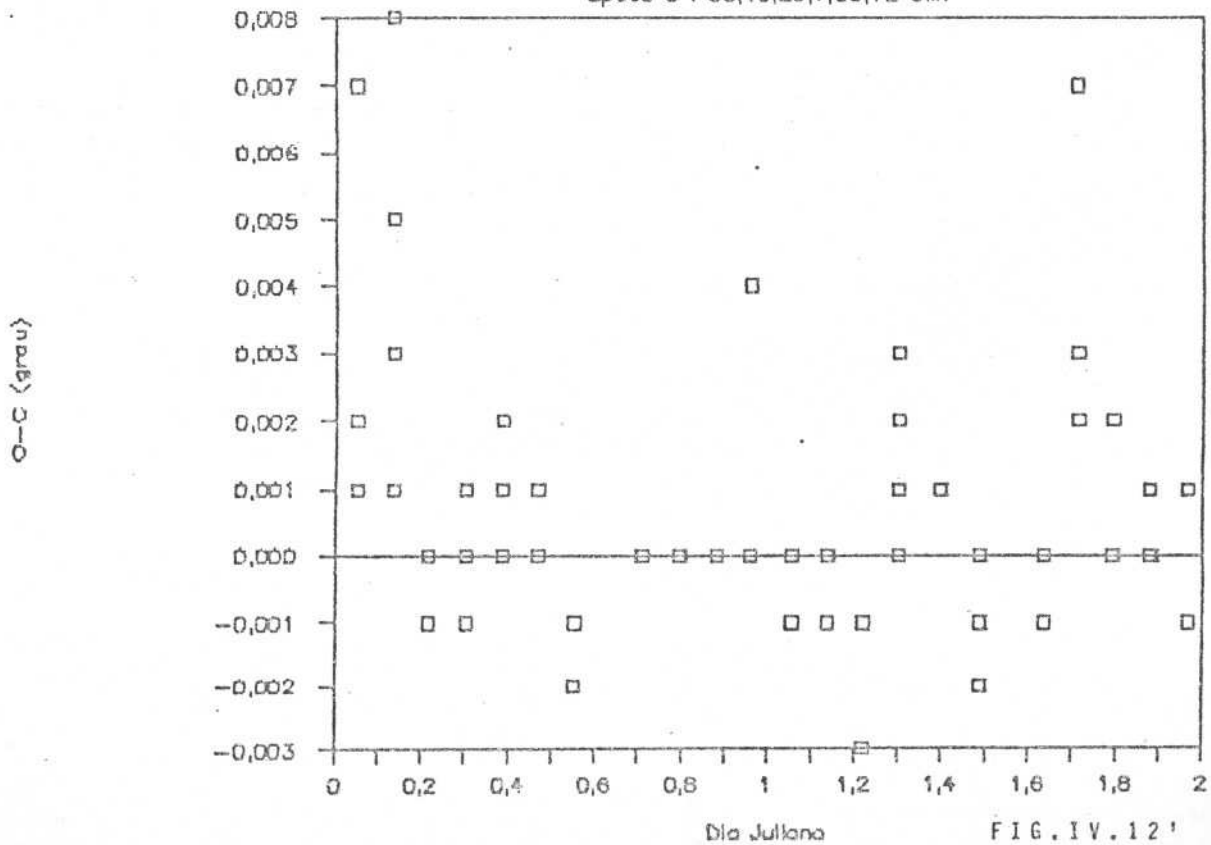
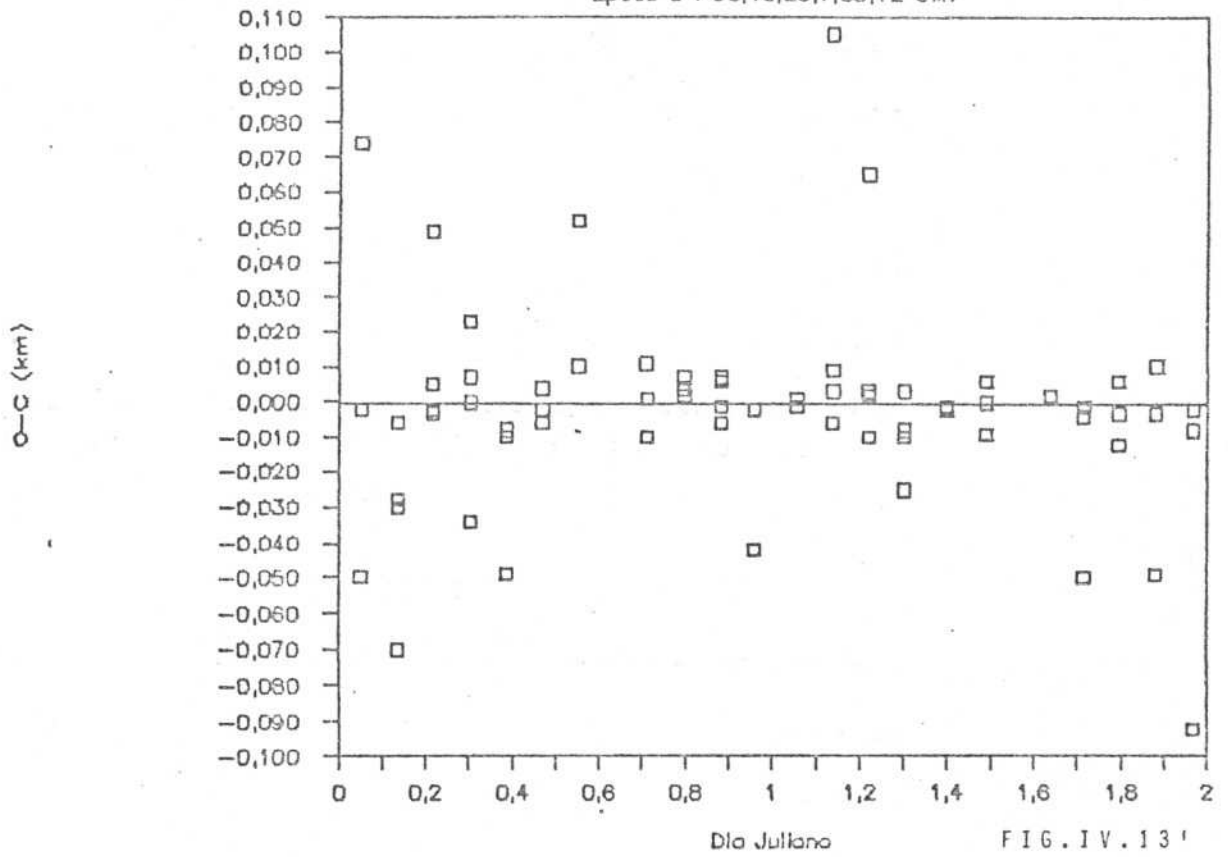


FIG. IV. 12'



# Distância (O-C)

Epoca 0 : 88,10,25,7,53,12 GMT



ÉPOCA	$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$	$\lambda_7$
BB 10 25 9 6 14	-65.0285	-0.002407	-0.0000025	-0.0001313	-0.02592	-0.06228	0.01731
BB 10 25 9 6 43	-65.0282	-0.002834	-0.0000025	-0.0001313	-0.02623	-0.06249	0.01731
BB 10 25 9 7 13	-65.0280	-0.003047	-0.0000025	-0.0001315	-0.02638	-0.06259	0.01731
BB 10 25 11 9 49	-65.0242	-0.006728	-0.0000024	-0.0001315	-0.02686	-0.06563	0.01730
BB 10 25 11 10 19	-65.0233	-0.007597	-0.0000024	-0.0001314	-0.02717	-0.06692	0.01731
BB 10 25 11 10 48	-65.0229	-0.008110	-0.0000024	-0.0001313	-0.02734	-0.06745	0.01731
BB 10 25 11 11 18	-65.0223	-0.008408	-0.0000024	-0.0001316	-0.02735	-0.06749	0.01730
BB 10 25 13 4 2	-65.0224	-0.008699	-0.0000024	-0.0001313	-0.02750	-0.06708	0.01730
BB 10 25 13 4 31	-65.0220	-0.008652	-0.0000024	-0.0001317	-0.02753	-0.06679	0.01730
BB 10 25 13 5 1	-65.0224	-0.008552	-0.0000024	-0.0001317	-0.02753	-0.06688	0.01730
BB 10 25 13 5 30	-65.0225	-0.008526	-0.0000024	-0.0001313	-0.02753	-0.06693	0.01731
BB 10 25 15 11 19	-65.0241	-0.007323	-0.0000024	-0.0001313	-0.02729	-0.06708	0.01730
BB 10 25 15 11 49	-65.0254	-0.006665	-0.0000024	-0.0001313	-0.02735	-0.06697	0.01731
BB 10 25 15 12 18	-65.0254	-0.006618	-0.0000024	-0.0001315	-0.02742	-0.06676	0.01731
BB 10 25 15 12 47	-65.0250	-0.007005	-0.0000024	-0.0001315	-0.02735	-0.06705	0.01731
BB 10 25 17 10 15	-65.0213	-0.009099	-0.0000025	-0.0001313	-0.02424	-0.06823	0.01730
BB 10 25 17 10 45	-65.0210	-0.009391	-0.0000025	-0.0001313	-0.02401	-0.06851	0.01730
BB 10 25 17 11 14	-65.0213	-0.009087	-0.0000025	-0.0001316	-0.02405	-0.06845	0.01730
BB 10 25 19 8 34	-65.0227	-0.002868	-0.0000025	-0.0001313	-0.02133	-0.06719	0.01731
BB 10 25 19 9 3	-65.0226	-0.002403	-0.0000025	-0.0001312	-0.02152	-0.06716	0.01730
BB 10 25 19 9 33	-65.0189	-0.002484	-0.0000025	-0.0001313	-0.02168	-0.06711	0.01731
BB 10 25 21 8 56	-65.0285	-0.002827	-0.0000021	-0.0001313	-0.02500	-0.07248	0.01731
BB 10 25 21 9 26	-65.0291	-0.005546	-0.0000021	-0.0001313	-0.02515	-0.07262	0.01730
BB 10 26 0 55 17	-65.0282	-0.005412	-0.0000021	-0.0001313	-0.02551	-0.06978	0.01731
BB 10 26 0 55 46	-65.0284	-0.005381	-0.0000021	-0.0001313	-0.02549	-0.06946	0.01731
BB 10 26 0 56 16	-65.0279	-0.004602	-0.0000021	-0.0001313	-0.02550	-0.06953	0.01731
BB 10 26 3 0 19	-65.0283	-0.005593	-0.0000021	-0.0001323	-0.02554	-0.06948	0.01731
BB 10 26 3 0 48	-65.0288	-0.005478	-0.0000021	-0.0001323	-0.02559	-0.06933	0.01731
BB 10 26 3 1 18	-65.0292	-0.005430	-0.0000021	-0.0001325	-0.02563	-0.06913	0.01730
BB 10 26 3 1 48	-65.0289	-0.004565	-0.0000021	-0.0001325	-0.02561	-0.06929	0.01730
BB 10 26 5 4 20	-65.0287	-0.003624	-0.0000022	-0.0001333	-0.02540	-0.06735	0.01731
BB 10 26 5 4 49	-65.0286	-0.003581	-0.0000022	-0.0001335	-0.02531	-0.06703	0.01731
BB 10 26 5 5 19	-65.0286	-0.003575	-0.0000022	-0.0001332	-0.02523	-0.06654	0.01730
BB 10 26 5 5 48	-65.0278	-0.003073	-0.0000022	-0.0001334	-0.02525	-0.06649	0.01730
BB 10 26 6 51 51	-65.0248	-0.004359	-0.0000023	-0.0001334	-0.02821	-0.06650	0.01731
BB 10 26 6 52 21	-65.0242	-0.005047	-0.0000023	-0.0001335	-0.02796	-0.06760	0.01731
BB 10 26 9 12 19	-65.0239	-0.005401	-0.0000028	-0.0001323	-0.02805	-0.06678	0.01731
BB 10 26 9 12 48	-65.0238	-0.005185	-0.0000028	-0.0001313	-0.02769	-0.06703	0.01730
BB 10 26 11 12 5	-65.0255	-0.005914	-0.0000027	-0.0001328	-0.02774	-0.06707	0.01731
BB 10 26 11 12 35	-65.0267	-0.005677	-0.0000028	-0.0001329	-0.02769	-0.06772	0.01730
BB 10 26 11 13 4	-65.0253	-0.005461	-0.0000024	-0.0001326	-0.02770	-0.06776	0.01730
BB 10 26 11 13 33	-65.0256	-0.005467	-0.0000025	-0.0001323	-0.02769	-0.06773	0.01731
BB 10 26 13 9 4	-65.0259	-0.004830	-0.0000025	-0.0001323	-0.02652	-0.06556	0.01731
BB 10 26 13 9 33	-65.0255	-0.004924	-0.0000028	-0.0001328	-0.02654	-0.06536	0.01731
BB 10 26 13 10 3	-65.0254	-0.004427	-0.0000028	-0.0001339	-0.02656	-0.06474	0.01730
BB 10 26 13 10 32	-65.0251	-0.004233	-0.0000028	-0.0001333	-0.02655	-0.06448	0.01730
BB 10 26 15 6 2	-65.0272	-0.005657	-0.0000028	-0.0001335	-0.02573	-0.06604	0.01730
BB 10 26 15 6 31	-65.0268	-0.005814	-0.0000028	-0.0001332	-0.02559	-0.06611	0.01730
BB 10 26 15 7 0	-65.0265	-0.004281	-0.0000028	-0.0001332	-0.02572	-0.06674	0.01730
BB 10 26 15 7 30	-65.0262	-0.004098	-0.0000028	-0.0001322	-0.02640	-0.06673	0.01731
BB 10 26 17 24 42	-65.0265	-0.004896	-0.0000025	-0.0001331	-0.02565	-0.06709	0.01731
BB 10 26 17 25 11	-65.0262	-0.004095	-0.0000025	-0.0001335	-0.02639	-0.06701	0.01731
BB 10 26 19 35 15	-65.0268	-0.003764	-0.0000023	-0.0001337	-0.02658	-0.06683	0.01731
BB 10 26 19 35 44	-65.0271	-0.003796	-0.0000024	-0.0001336	-0.02642	-0.06690	0.01731
BB 10 26 19 36 13	-65.0268	-0.003578	-0.0000024	-0.0001335	-0.02640	-0.06599	0.01730
BB 10 26 19 36 43	-65.0266	-0.003747	-0.0000024	-0.0001331	-0.02593	-0.06650	0.01730
BB 10 26 23 9 17	-65.0264	-0.000501	-0.0000029	-0.0001328	-0.02574	-0.06751	0.01730
BB 10 26 23 9 47	-65.0269	-0.003834	-0.0000029	-0.0001329	-0.02508	-0.06655	0.01730
BB 10 27 1 0 51	-65.0272	-0.003756	-0.0000023	-0.0001329	-0.02559	-0.06722	0.01731
BB 10 27 1 1 52	-65.0274	-0.004235	-0.0000023	-0.0001327	-0.02468	-0.06706	0.01731
BB 10 27 1 2 21	-65.0259	-0.004384	-0.0000023	-0.0001327	-0.02466	-0.06631	0.01731
BB 10 27 2 54 29	-65.0258	-0.004191	-0.0000023	-0.0001327	-0.02463	-0.06754	0.01731
BB 10 27 2 54 59	-65.0256	-0.004776	-0.0000028	-0.0001328	-0.02467	-0.06751	0.01731
BB 10 27 2 55 28	-65.0260	-0.003519	-0.0000028	-0.0001328	-0.02472	-0.06617	0.01730
BB 10 27 2 55 58	-65.0267	-0.005092	-0.0000027	-0.0001323	-0.02470	-0.06674	0.01730
BB 10 27 5 0 23	-65.0262	-0.004542	-0.0000027	-0.0001332	-0.02664	-0.06688	0.01730
BB 10 27 5 1 21	-65.0258	-0.003996	-0.0000027	-0.0001328	-0.02658	-0.06696	0.01731
BB 10 27 5 1 51	-65.0259	-0.004500	-0.0000029	-0.0001328	-0.02653	-0.06604	0.01731
BB 10 27 7 5 14	-65.0257	-0.004851	-0.0000026	-0.0001331	-0.02707	-0.06695	0.01731
BB 10 27 7 6 13	-65.0258	-0.003634	-0.0000028	-0.0001330	-0.02633	-0.06605	0.01731
BB 10 27 7 6 43	-65.0261	-0.004107	-0.0000027	-0.0001323	-0.02654	-0.06601	0.01731

TABELA IV.6<sup>1</sup> - VETOR ESTADO PÓS - MANOBRA

FIG. IV-14'

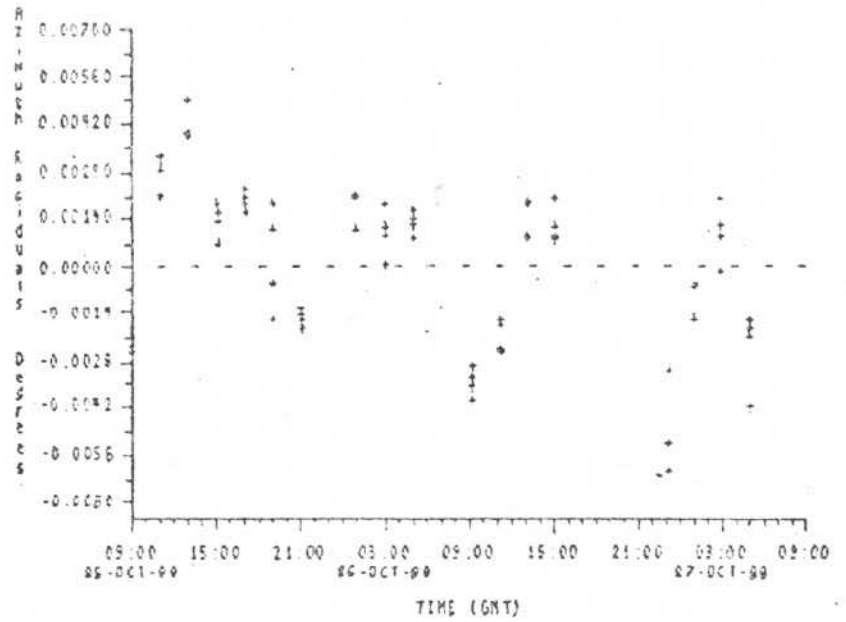


FIG. IV-15'

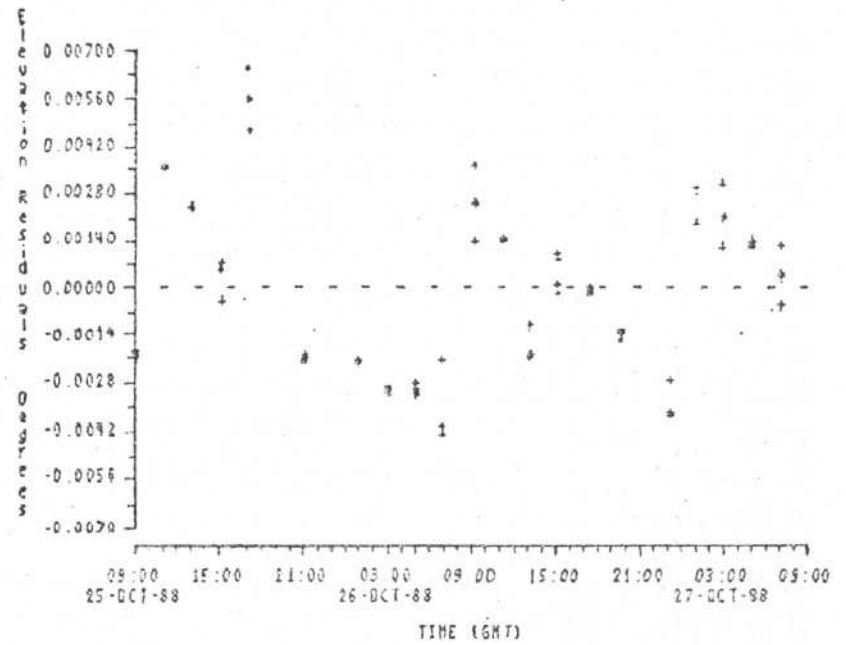
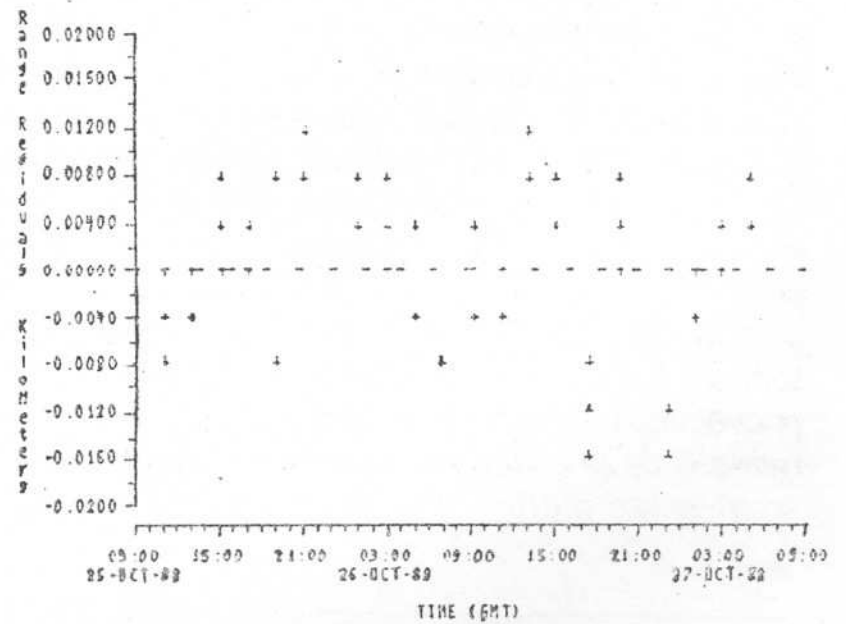


FIG. IV-16'



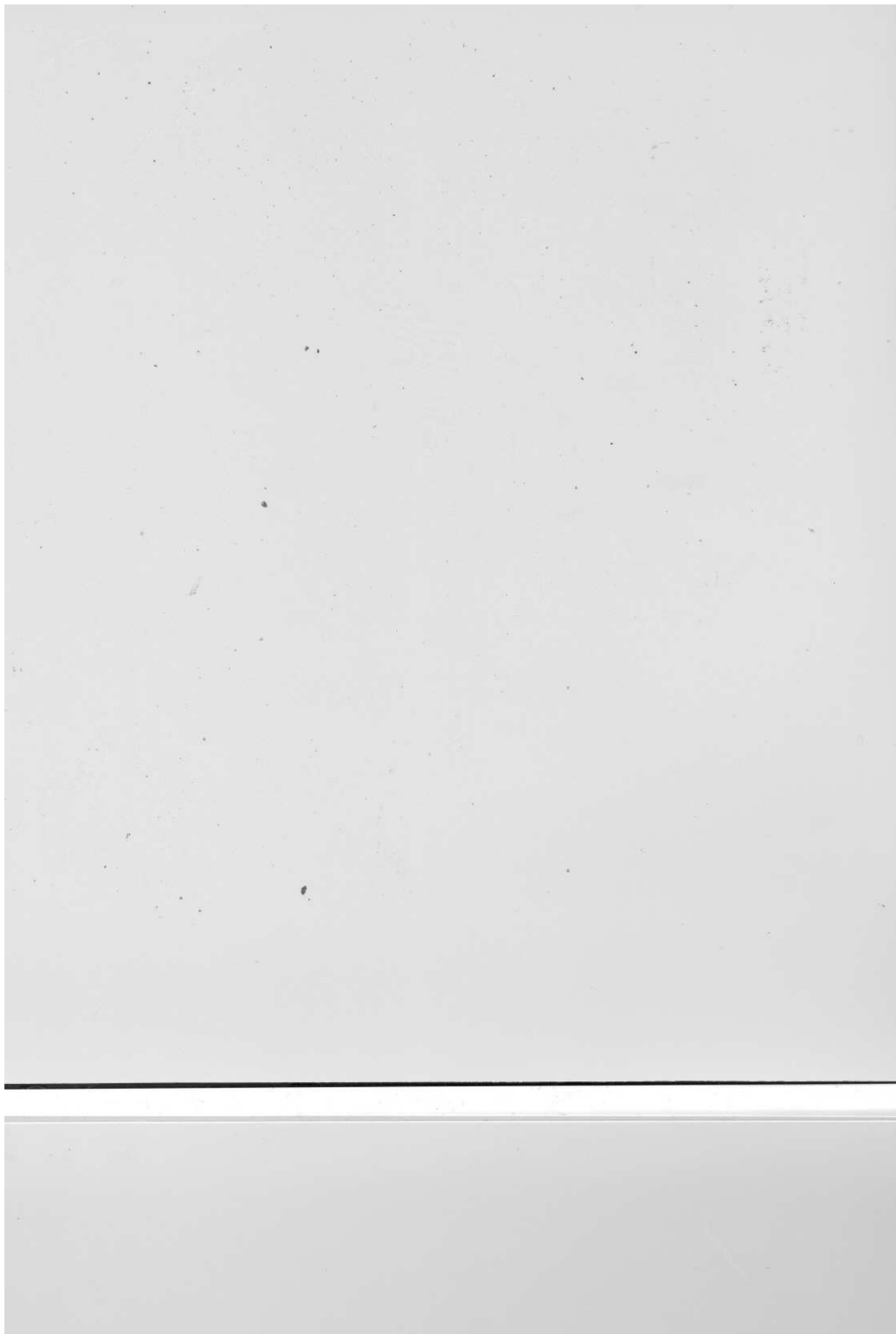
## IV.2 - Conclusões

### IV.2.1 - Propagação da Órbita

Azimute, elevação e distância são os elementos observados sendo portanto suas evoluções no tempo objetivo desta análise. É bom lembrar que o modelo semi-analítico é comparado com um de integração numérica considerado mais preciso.

Na tabela IV.3 é observado que as diferenças em azimute e elevação, entre os métodos numéricos e semi-analítico usado, não ultrapassa  $|0^{\circ}.001|$ . Isto é esperado e pode ser explicado. Um erro de propagação máximo (tabela IV.3) na longitude de  $|0^{\circ}.0007|$  pode acarretar, de acordo com as derivadas parciais das observações (tabela IV.4) erros de ordem de  $10^{-3}$  em azimute. Os outros elementos orbitais respondem por erros de ordem de  $10^{-4}$ , os quais combinados com os erros devido a longitude manteve a diferença em azimute em torno de  $|0^{\circ}.001|$ . A inclinação com um erro máximo de propagação de  $|0^{\circ}.00015|$  juntamente com a longitude são os principais responsáveis pelos erros em elevação respondendo por diferenças menores que  $10^{-3}$ . A precisão de propagação do azimute e elevação está bem acima da observação cujo  $3\sigma$ , onde  $\sigma$  é o desvio padrão, é igual a  $0^{\circ}.042$ .

A deriva e a excentricidade são as principais fontes de erros da distância. Só a excentricidade pode acarretar, para um erro máximo de  $2.6 \times 10^{-6}$ , até  $|60m|$  e a deriva  $|70m|$  no cômputo da distância. A combinação dos erros na distância, para o intervalo de propagação do exemplo, não excede  $|90m|$ . É possível observar que apenas a componente  $e_x$  atinge um erro de propagação de  $2.6 \times 10^{-6}$  e mesmo assim  $e_x$  em poucos pontos se comparado com o intervalo. Observando que os erros na propagação de  $e_y$  não excedem  $10^{-6}$ , estando em uma faixa ótima, e considerando  $\omega$  que as frequências da parte periódica são as mesmas para  $e_x$  e  $e_y$ , portanto corretas, conclui-se que exista erro de amplitude,  $e_x$  seja  $e_y$  por falta de mais termos ou erro nos próprios termos considerados. Os erros na distância provocados pela deriva estão dentro do esperado, uma vez que o modelo de propagação considera poucos termos abaixo de  $|80m|$  no semi-seixo maior. Para melhorar a propagação da distância é preciso



## CAPÍTULO V - Conclusões Finais

Através da adequação e utilização de um modelo de propagação semi-analítico e do filtro estendido de Kalman como estimador, este trabalho demonstrou a viabilidade destes dois métodos complementares, utilizados em conjunto, na determinação de órbitas geoestacionárias em tempo real. Este objetivo foi atingido até com maior precisão, se comparado ao método dos mínimos quadrados, no caso dos resíduos em azimute e elevação, e com menor precisão nos resíduos da distância.

A determinação de uma órbita logo após uma manobra torna-se viável, tomando como informação a priori a órbita prevista pós manobra; neste caso, a vantagem é grande uma vez que não é preciso esperar 48 horas para se avaliar o desempenho dos jatos em uma manobra; é principalmente vantajoso no caso em que ocorra pane no satélite (acarretando mudança de posição não desejada/planejada), pois abre a possibilidade de determinação da órbita em pouco tempo, com precisão suficiente para planejamento e execução de manobras corretivas no satélite em tempo hábil.

A utilização da força da radiação solar, de maneira indireta, como um dos parâmetros a serem estimados possibilita o acompanhamento das variações sazonais da força e daquelas variações que são função da massa do satélite.

A experiência adquirida ao longo da realização deste trabalho possibilitou o surgimento de importantes constatações e idéias de melhoramentos. Observa-se que, por exemplo, a propagação da órbita geoestacionária é bem "mapeada" através da integração numérica ou através de modelos como o do Kamel (1978); por outro lado, os modelos semi-analíticos existentes não são suficientes para refletir na propagação a precisão observacional atual. Considerando que este tipo de uma excelente ferramenta, tanto para entendimento dos efeitos das perturbações separadamente, quanto para ser utilizado em pequenos computadores a bordo de satélites, sugere-se que a formulação de teorias semi-analíticas sejam feitas com um rigor matemático maior;

assim, seria interessante retomar, por exemplo o modelo de Cot (1984) e deduzir termos que reflitam a precisão obtida atualmente nas observações, principalmente no que diz respeito às medidas de distância. É, finalmente, considerar os "biases" das antenas como parâmetros do vetor de estado seria muito útil, tornando-os mais precisos e evitando ainda a atualização manual destes valores.

APÊNDICE I - Derivada Parcial do Vetor observação em relação ao Vetor de Variáveis paramétricas (Matriz H).

O vetor observação formado pelo Azimute (Az), Elevação (El) e distância (Ds) é dado por:

$$Az = \text{arctg} \left( \frac{\rho_e}{\rho_n} \right)$$

$$El = \text{arcsen} \left( \frac{\rho_e}{|Ds|} \right)$$

$$Ds = (\rho_e^2 + \rho_n^2 + \rho_v^2)^{\frac{1}{2}}$$

onde  $\rho_e$ ,  $\rho_v$ ,  $\rho_n$  são as coordenadas do vetor satélite-estação de controle no sistema topocêntrico. A relação com o sistema inercial geocêntrico é escrita como:

$$\rho_e = -\rho_x \text{sen} \alpha_{sta} + \rho_y \text{cos} \alpha_{sta}$$

$$\rho_n = -(\rho_x \text{cos} \alpha_{sta} + \rho_y \text{sen} \alpha_{sta}) \text{sen} \zeta_{sta} + \rho_z \text{cos} \zeta_{sta}$$

$$\rho_v = (\rho_x \text{cos} \alpha_{sta} + \rho_y \text{sen} \alpha_{sta}) \text{cos} \zeta_{sta} + \rho_z \text{sen} \zeta_{sta} \quad \dots A1.1$$

onde

$$\rho_x = x - x_{sta}$$

$$\rho_y = y - y_{sta}$$

$$\rho_z = z - z_{sta}$$



$x, y, z$  e  $x_{sta}, y_{sta}, z_{sta}$  são as coordenadas do satélite e da estação respectivamente, no Sistema Inercial Geocêntrico;  $\zeta_{sta}$  e  $\alpha_{sta}$  são a latitude geodésica e a ascensão reta da estação. As derivadas parciais das observações em relação ao estado  $\lambda_i$ , são dadas por:

$$\frac{\partial Az}{\partial \lambda_i} = \left( \rho_n \frac{\partial \rho_e}{\partial \lambda_i} - \rho_e \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda_i} \right) / (\rho_n^2 + \rho_e^2)$$

$$\frac{\partial El}{\partial \lambda_i} = \frac{1}{\rho} \left( \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda_i} - \frac{\rho_v}{Ds} \cdot \frac{\partial Ds}{\partial \lambda_i} \right) / \left( \frac{\rho_v}{Ds} \right)^2$$

$$\frac{\partial Ds}{\partial \lambda_i} = \rho^{-\frac{1}{2}} \left( \rho_e \frac{\partial \rho_e}{\partial \lambda_i} + \rho_v \frac{\partial \rho_v}{\partial \lambda_i} + \rho_n \frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda_i} \right) \quad \dots A1-2$$

Observando que

$$\frac{\partial x_{sta}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial y_{sta}}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial z_{sta}}{\partial \lambda_i} = 0$$

tem-se

$$\frac{\partial \rho_e}{\partial \lambda_i} = - \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \operatorname{sen} \alpha_{sta} + \frac{\partial y}{\partial \lambda_i} \operatorname{cos} \alpha_{sta}$$

$$\frac{\partial \rho_v}{\partial \lambda_i} = \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \operatorname{cos} \alpha_{sta} + \frac{\partial y}{\partial \lambda_i} \operatorname{sen} \alpha_{sta} \right) \operatorname{cos} \zeta_{sta} + \frac{\partial z}{\partial \lambda_i} \operatorname{sen} \zeta_{sta}$$

$$\frac{\partial \rho_n}{\partial \lambda_i} = - \left( \frac{\partial x}{\partial \lambda_i} \operatorname{cos} \alpha_{sta} + \frac{\partial y}{\partial \lambda_i} \operatorname{sen} \alpha_{sta} \right) \operatorname{sen} \zeta_{sta} + \frac{\partial z}{\partial \lambda_i} \operatorname{cos} \zeta_{sta} \quad \dots A1.3$$

A escolha da definição para as coordenadas inerciais geocêntricas em função dos parâmetros orbitais elípticos é tal que:

$$x = r \left\{ \cos^2 i \cos \alpha + \sin^2 i \cos(\alpha - 2\Omega) \right\}$$

$$y = r \left\{ \cos^2 i \sin \alpha - \sin^2 i \sin(\alpha - 2\Omega) \right\}$$

$$z = r \sin i \sin(\alpha - \Omega) \quad \dots A1.4$$

com

$$\alpha = f + \Pi = M + 2 e \sin M + \Pi = l + 2 e \sin(l - \Pi + AHG) + AHG$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos f}$$

$$l = \Pi + M - AHG$$

$$\Pi = \omega + \Omega$$

onde

$f$ ,  $r$  e  $AHG$  são a anomalia verdadeira, a distância satélite-centro da Terra e o ângulo horário de Greenwich, respectivamente.

Lembrando que

$$a = a_s \left( 1 - \frac{2d}{3n_s} \right)$$

$$e_x = e \cos \Pi$$

e

$$i_x = i \cos \Omega$$

$$e_y = e \operatorname{sen} \Pi$$

$$i_y = i \operatorname{sen} \Omega$$

tem-se

$$\frac{\partial a}{\partial d} = -\frac{2a_s}{3n_s}$$

$$\frac{\partial e}{\partial e_x} = \cos \Pi$$

$$\frac{\partial i}{\partial i_x} = \cos \Omega$$

$$\frac{\partial e}{\partial e_y} = \operatorname{sen} \Pi$$

$$\frac{\partial i}{\partial i_y} = \operatorname{sen} \Omega$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial e_x} = -\frac{\operatorname{sen} \Pi}{e}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i_x} = -\frac{\operatorname{sen} \Omega}{i}$$

$$\frac{\partial \Pi}{\partial e_y} = \frac{\cos \Pi}{e}$$

$$\frac{\partial \Omega}{\partial i_y} = -\frac{\cos \Omega}{i}$$

...A1.5

As derivadas parciais das coordenadas inerciais geocêntricas  $(x, y, z)$  em relação às variáveis  $a, e, i, \Pi$  e  $\Omega$ , são:

$$\frac{\partial x}{\partial a} = \frac{x}{a} \qquad \frac{\partial y}{\partial a} = \frac{y}{a} \qquad \frac{\partial z}{\partial a} = \frac{z}{a}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e} = & - \left\{ \frac{2e}{(1-e^2)} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{(1+e \cos f)} \right\} x \\ & - \left\{ 2 (\cos^2 i \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega)) \operatorname{sen} M \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial e} = & - \left\{ \frac{2e}{(1-e^2)} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{(1+e \cos f)} \right\} y \\ & + \left\{ 2 (\cos^2 i \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha - 2\Omega)) \operatorname{sen} M \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial e} = & - \left\{ \frac{2e}{(1-e^2)} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{(1+e \cos f)} \right\} z \\ & + \left\{ 2 (\operatorname{sen} i \cos(\alpha - \Omega)) \operatorname{sen} M \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial \Pi} = & - \left\{ \frac{(1 + 2e \cos M)}{(1 + e \cos f)} e \operatorname{sen} f \right\} x \\ & \left\{ 2 (\cos^2 i \operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega)) e \cos M \right\} r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Pi} = - \left\{ \frac{(1 + 2e \cos M)}{(1 + e \cos f)} e \operatorname{sen} f \right\} y$$

$$- \left\{ 2 (\cos^2 i \cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha - 2\Omega)) e \cos M \right\} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Pi} = - \left\{ \frac{(1 + 2e \cos M)}{(1 + e \cos f)} e \operatorname{sen} f \right\} z$$

$$- \left\{ 2 (\operatorname{sen} i \cos(\alpha - \Omega) e \cos M) \right\} r$$

$$\frac{\partial x}{\partial i} = \left\{ - 2 \cos i \operatorname{sen} i (\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\Omega)) \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial i} = \left\{ - 2 \cos i \operatorname{sen} i (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega)) \right\} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial i} = \left\{ \cos i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) \right\} r$$

$$\frac{\partial x}{\partial \Omega} = \left\{ 2 \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha_s - 2\Omega) \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \Omega} = \left\{ 2 \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha_s - 2\Omega) \right\} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial \Omega} = \left\{ - \operatorname{sen} i \cos(\alpha_s - \Omega) \right\} r$$

...A1.6

As derivadas parciais das coordenadas inerciais geocêntricas ( $x, y, z$ ) em relação aos parâmetros  $\lambda_i$ , são dadas como se segue:

$$\frac{\partial X}{\partial \lambda_i} = \frac{\partial X}{\partial d} \frac{\partial d}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial X}{\partial l} \frac{\partial l}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial X}{\partial e_x} \frac{\partial e_x}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial X}{\partial e_y} \frac{\partial e_y}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial X}{\partial i_x} \frac{\partial i_x}{\partial \lambda_i} + \frac{\partial X}{\partial i_y} \frac{\partial i_y}{\partial \lambda_i}$$

...A1.7

onde  $X$  é  $x$  ou  $y$  ou  $z$

Desenvolvendo os termos em separado, e lembrando que

$$\frac{\partial x}{\partial d} = \frac{\partial x}{\partial a} \cdot \frac{\partial a}{\partial d}$$

$$\frac{\partial x}{\partial e_x} = \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial e_x} + \frac{\partial x}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial e_x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial e_y} = \frac{\partial x}{\partial e} \cdot \frac{\partial e}{\partial e_y} + \frac{\partial x}{\partial \Pi} \cdot \frac{\partial \Pi}{\partial e_y}$$

$$\frac{\partial x}{\partial i_x} = \frac{\partial x}{\partial i} \cdot \frac{\partial i}{\partial i_x} + \frac{\partial x}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i_x}$$

$$\frac{\partial x}{\partial i_y} = \frac{\partial x}{\partial i} \cdot \frac{\partial i}{\partial i_y} + \frac{\partial x}{\partial \Omega} \cdot \frac{\partial \Omega}{\partial i_y}$$

chega-se, a partir das equações 4 e 5, a

$$\frac{\partial x}{\partial d} = -\frac{2a_s x}{3n_s a}$$

$$\frac{\partial y}{\partial d} = -\frac{2a_s y}{3n_s a}$$

$$\frac{\partial z}{\partial d} = -\frac{2a_s z}{3n_s a}$$

$$\frac{\partial x}{\partial l} = (1+2e \cos M) \left\{ \frac{e \operatorname{sen} f}{(1+e \cos f)} x - (\cos^2 i \operatorname{sen} \alpha \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha_s - 2\Omega)) r \right\}$$

$$\frac{\partial y}{\partial l} = (1+2e \cos M) \left\{ \frac{e \operatorname{sen} f}{(1+e \cos f)} y + (\cos^2 i \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha - 2\Omega)) r \right\}$$

$$\frac{\partial z}{\partial l} = (1+2e \cos M) \left\{ \frac{e \operatorname{sen} f}{(1+e \cos f)} z + \operatorname{sen} i \cos(\alpha - \Omega) r \right\}$$

$$\frac{\partial x}{\partial e_x} = - \left\{ \left( \frac{2e}{(1-e^2)} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{(1+e \cos f)} \right) \cos \Pi \right.$$

$$\left. - \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} f}{(1+e \cos f)} \operatorname{sen} \Pi \right\} x$$

$$- \left\{ 2 (\cos^2 i \operatorname{sen} \alpha_s + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha_s - 2\Omega)) \operatorname{sen}(M + \Pi) \right\} r$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial e_x} = & - \left\{ \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{1+e \cos f} \right) \cos \Pi + \right. \\ & \left. - \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} \operatorname{sen} \Pi}{1+e \cos f} \right\} y \\ & + \left\{ 2 (\cos^2 i \cos \alpha_s - \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha_s - 2\Omega)) \operatorname{sen}(M + \Pi) \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial e_x} = & - \left\{ \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{1+e \cos f} \right) \cos \Pi + \right. \\ & \left. - \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} f \operatorname{sen} \Pi}{1+e \cos f} \right\} z \\ & + \left\{ 2 (\operatorname{sen} i \cos \alpha_s - \Omega) \operatorname{sen}(M + \Pi) \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial e_y} = & - \left\{ \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{1+e \cos f} \right) \operatorname{sen} \Pi \right. \\ & \left. + \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} f \cos \Pi}{1+e \cos f} \right\} x \\ & \left\{ 2 (\cos^2 i \operatorname{sen} \alpha_s + \operatorname{sen}^2 i \operatorname{sen}(\alpha_s - 2\Omega)) \cos(M + \Pi) \right\} r \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial e_y} = & - \left\{ \left( \frac{2e}{1-e^2} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{1+e \cos f} \right) \operatorname{sen} \Pi \right. \\ & \left. + \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} f \cos \Pi}{1+e \cos f} \right\} y \\ & - \left\{ 2 (\cos^2 i \cos \alpha - \operatorname{sen}^2 i \cos(\alpha - 2\Omega)) \cos(M + \Pi) \right\} r \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial e_y} = & - \left\{ \left( \frac{2e}{(1-e^2)} + \frac{(\cos f - 2e \operatorname{sen} f \operatorname{sen} M)}{(1+e \cos f)} \right) \operatorname{sen} \Pi \right. \\ & + \left. \frac{(1+2e \cos M) \operatorname{sen} f}{(1+e \cos f)} \cos \Pi \right\} z \\ & - \left\{ 2 (\operatorname{sen} i \cos(\alpha - \Omega)) \cos(M + \Pi) \right\} r \end{aligned}$$

$$\frac{\partial x}{\partial i_x} = \left\{ -2 \operatorname{sen} i (\cos i (\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\Omega)) \cos \Omega + \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega) \operatorname{sen} \Omega) \right\} r$$

$$\frac{\partial y}{\partial i_x} = \left\{ -2 \operatorname{sen} i (\cos i (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega)) \cos \Omega + \cos(\alpha - 2\Omega) \operatorname{sen} \Omega) \right\} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial i_x} = \left\{ \cos i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) \cos \Omega + \cos(\alpha - \Omega) \operatorname{sen} \Omega \right\} r$$

$$\frac{\partial x}{\partial i_y} = \left\{ -2 \operatorname{sen} i (\cos i (\cos \alpha - \cos(\alpha - 2\Omega)) \operatorname{sen} \Omega - \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega) \cos \Omega) \right\} r$$

$$\frac{\partial y}{\partial i_y} = \left\{ -2 \operatorname{sen} i \operatorname{cos} i (\operatorname{sen} \alpha + \operatorname{sen}(\alpha - 2\Omega)) \operatorname{sen} \Omega - \right. \\ \left. \operatorname{cos}(\alpha - 2\Omega) \operatorname{cos} \Omega \right\} r$$

$$\frac{\partial z}{\partial i_y} = \left\{ \operatorname{cos} i \operatorname{sen}(\alpha - \Omega) \operatorname{sen} \Omega - \operatorname{cos}(\alpha - \Omega) \operatorname{cos} \Omega \right\} r \quad \dots A1.8$$

As equações 8 são então substituídas em 3 que, por sua vez, juntamente com as equações 1, são substituídas em 2. Assim, as derivadas do vetor observação (azimute, elevação e range) em relação aos parâmetros  $\lambda_i$ , são finalmente determinadas.

## APÊNDICE II - Equações Simplificadas de Lagrange

As equações de Lagrange para os elementos clássicos, considerando o potencial perturbador  $R$ , são dadas por

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M}$$

$$\frac{de}{dt} = \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial M} - \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{di}{dt} = - \frac{1}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial \Omega} + \frac{\text{cosi}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial \omega}$$

$$\frac{dM}{dt} = n - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} - \frac{1-e^2}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e}$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{(1-e^2)^{\frac{1}{2}}}{na^2e} \frac{\partial R}{\partial e} - \frac{\text{cosi}}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2(1-e^2)^{\frac{1}{2}} \text{seni}} \frac{\partial R}{\partial i}$$

O objetivo deste apêndice é obter as equações de Lagrange para uma órbita geostacionária, nas variáveis não singulares  $l$ ,  $a/d$ ,  $ex$ ,  $ey$ ,  $ix$ ,  $iy$ . Considerando a primeira ordem na excentricidade e inclinação, as equações acima são simplificadas da maneira que se segue

1) Longitude média ( $l$ ) e deriva ( $d$ )

A Longitude média é dada por

$$l = \omega + \Omega + M - AHG$$

assim

$$\frac{dl}{dt} = \frac{d\omega}{dt} + \frac{dM}{dt} - \frac{dAHG}{dt}$$

$$\frac{dl}{dt} = n - \omega_t - \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial a} \quad \dots AII.1$$

onde  $\omega_t$  é a velocidade de rotação da Terra.

A deriva é dada por

$$d = \frac{3n_s}{2} \left(1 - \frac{a}{a_s}\right)$$

portanto

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{3}{2} \frac{n_s}{a_s} \frac{da}{dt}$$

como

$$\frac{da}{dt} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial M} = \frac{2}{na} \frac{\partial R}{\partial l} \quad \dots AII.2$$

$$\frac{dd}{dt} = -\frac{3n_s}{naa_s} \frac{\partial R}{\partial l} \quad \dots AII.2'$$

2) Excentricidade ( $e_x, e_y$ )

A definição de  $e_x$  e  $e_y$  é dada por

$$e_x = e \cos \Pi = e \cos(\omega + \Omega)$$

$$e_y = e \sin \Pi = e \sin(\omega + \Omega)$$

assim

$$\frac{de_x}{dt} = \cos(\omega + \Omega) \frac{de}{dt} - e \sin(\omega + \Omega) \frac{d(\omega + \Omega)}{dt}$$

e

$$\frac{de_y}{dt} = \sin(\omega + \Omega) \frac{de}{dt} + e \cos(\omega + \Omega) \frac{d(\omega + \Omega)}{dt}$$

sabendo que  $i$  e  $M$  não dependem de  $e_x$  e  $e_y$ , tem-se

$$\frac{de}{dt} = \frac{1}{na^2} \left( \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial e_x} - \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial e_y} \right)$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{1}{na^2} \left( \cos \Pi \frac{\partial R}{\partial e_x} + \sin \Pi \frac{\partial R}{\partial e_y} \right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = 0$$

desta maneira

$$\frac{de_x}{dt} = -\frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_y} \quad \dots \text{AII.3}$$

$$\frac{de_y}{dt} = \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial e_x} \quad \dots \text{AII.4}$$

3) Inclinação ( $i_x, i_y$ )

Por definição

$$i_x = i \cos \Omega$$

$$i_y = i \sin \Omega$$

assim,

$$\frac{di_x}{dt} = \cos \Omega \frac{di}{dt} - i \sin \Omega \frac{d\Omega}{dt}$$

$$\frac{di_y}{dt} = \sin \Omega \frac{di}{dt} + i \cos \Omega \frac{d\Omega}{dt}$$

como  $\omega$  não depende de  $i_x$  e  $i_y$

$$\frac{di}{dt} = \frac{i}{na^2 \text{sen} i} \left( \text{sen} \Omega \frac{\partial R}{\partial i_x} - \text{cos} \Omega \frac{\partial R}{\partial i_y} \right)$$

$$\frac{d\Omega}{dt} = \frac{1}{na^2 \text{sen} i} \left( \text{cos} \Omega \frac{\partial R}{\partial i_x} + \text{sen} \Omega \frac{\partial R}{\partial i_y} \right)$$

desta maneira

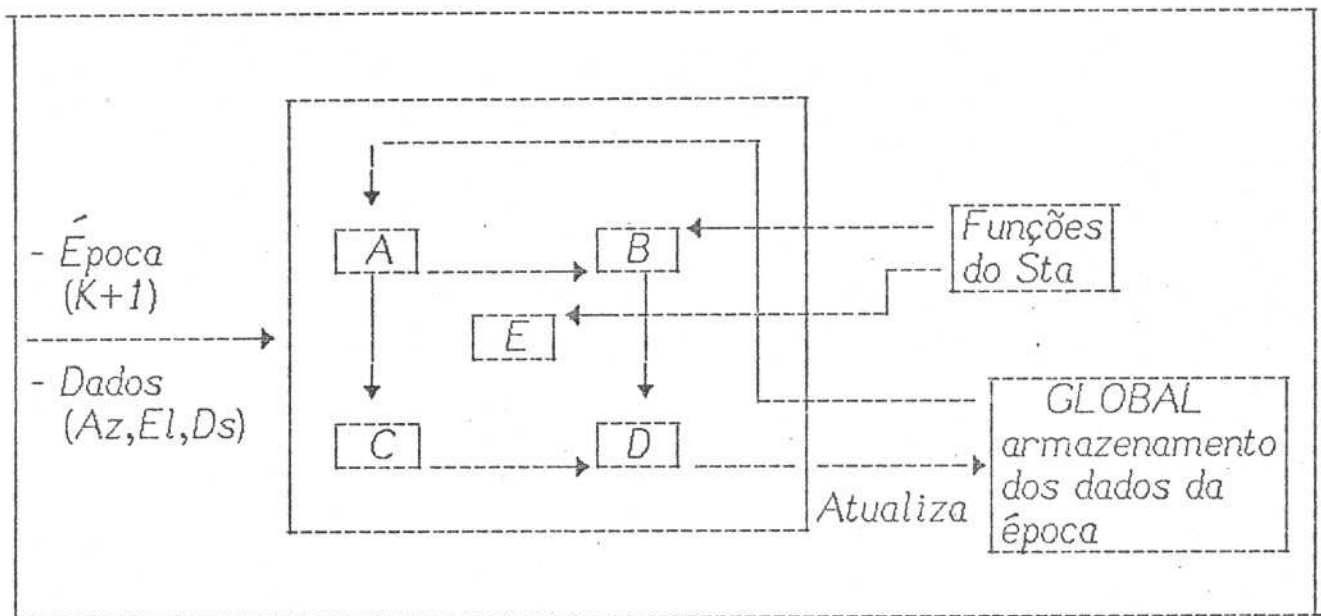
$$\frac{di_x}{dt} = - \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_y} \quad \dots \text{All.5}$$

$$\frac{di_y}{dt} = - \frac{1}{na^2} \frac{\partial R}{\partial i_x} \quad \dots \text{All.6}$$

### APÊNDICE III - Estrutura do "Software" de Estimação

A estrutura do pacote de determinação de órbitas em tempo real (Rtoe) é mostrada nos quadros abaixo. Os nomes das variáveis que aparecem em cada módulo são os mesmos utilizados nos capítulos e apêndices anteriores. Os módulos externos denominados "Funções do Sta" e "Global" são funções já existentes no "software" atual dos satélites Brasilsat A1 & A2.

#### RTOE



A → Propagação Semi-Analítica

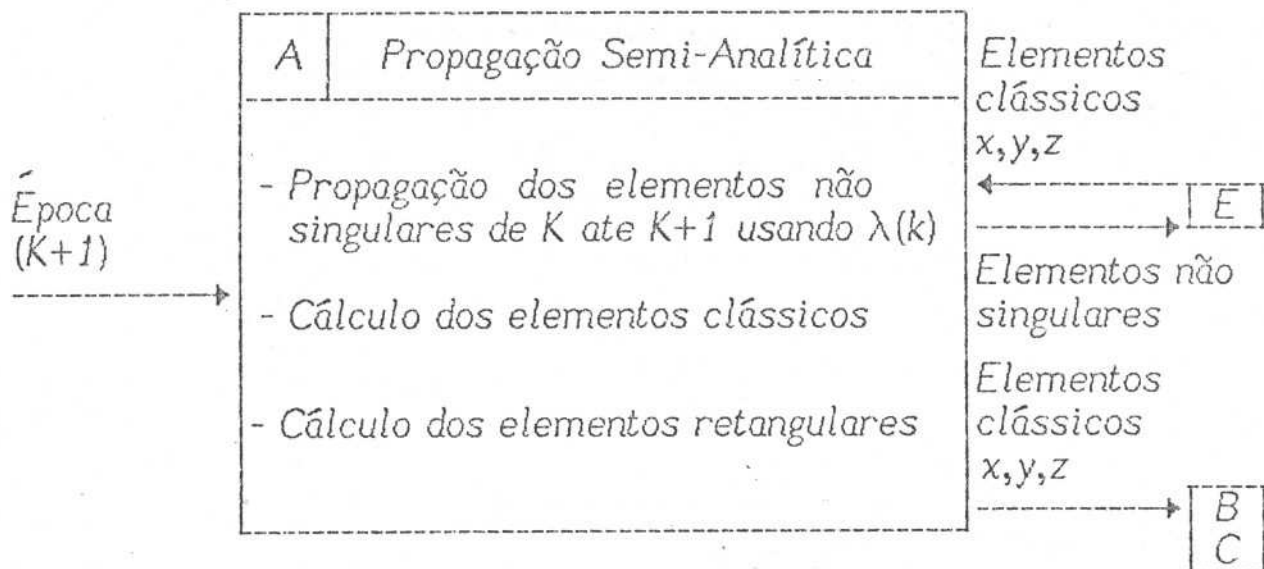
B → Cálculo de Az, El, Ds

C → Cálculo das Derivadas Parciais

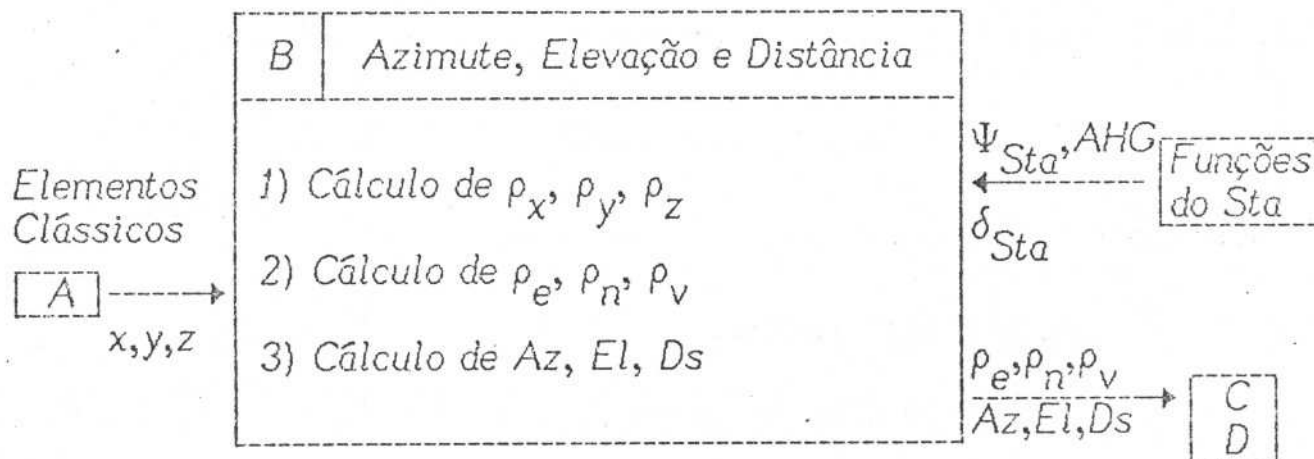
D → Filtragem de Kalman



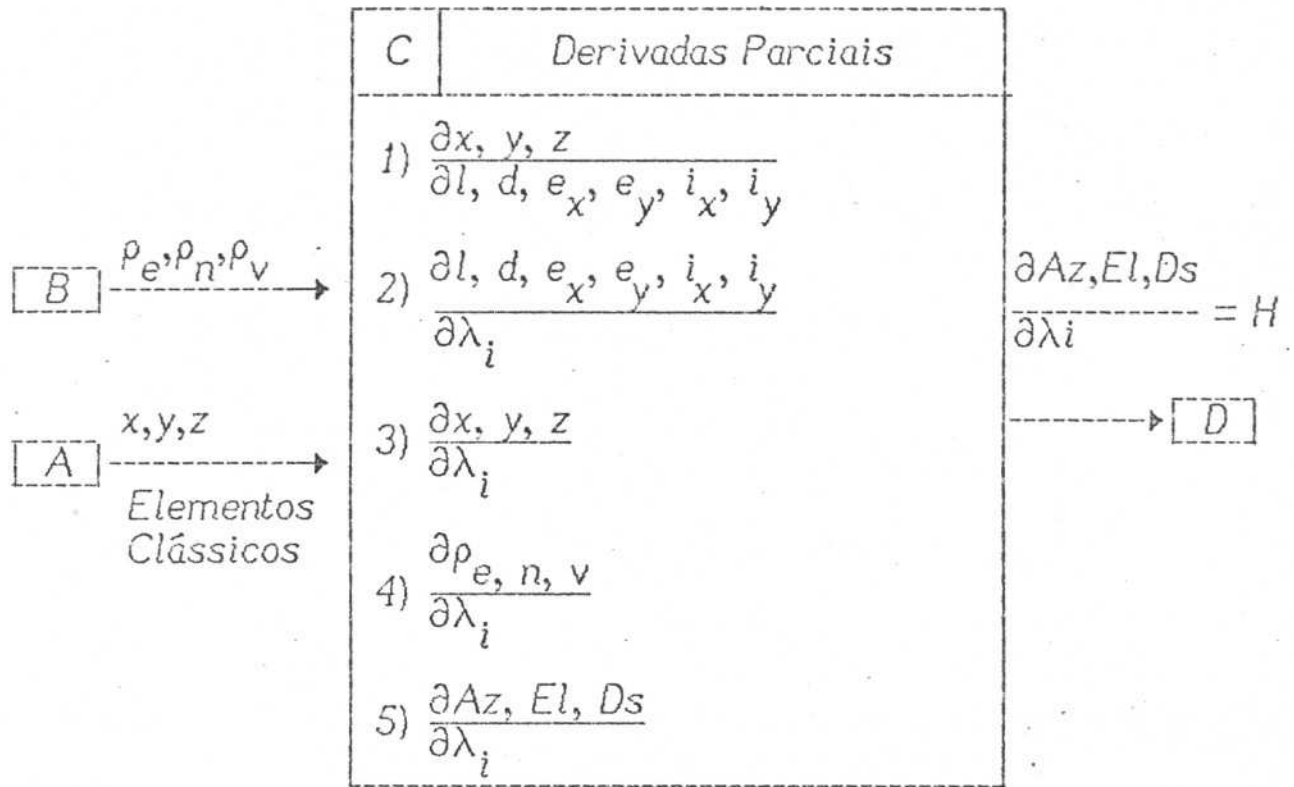
Modulo A - Propaga semi-analiticamente os elementos orbitais não singulares



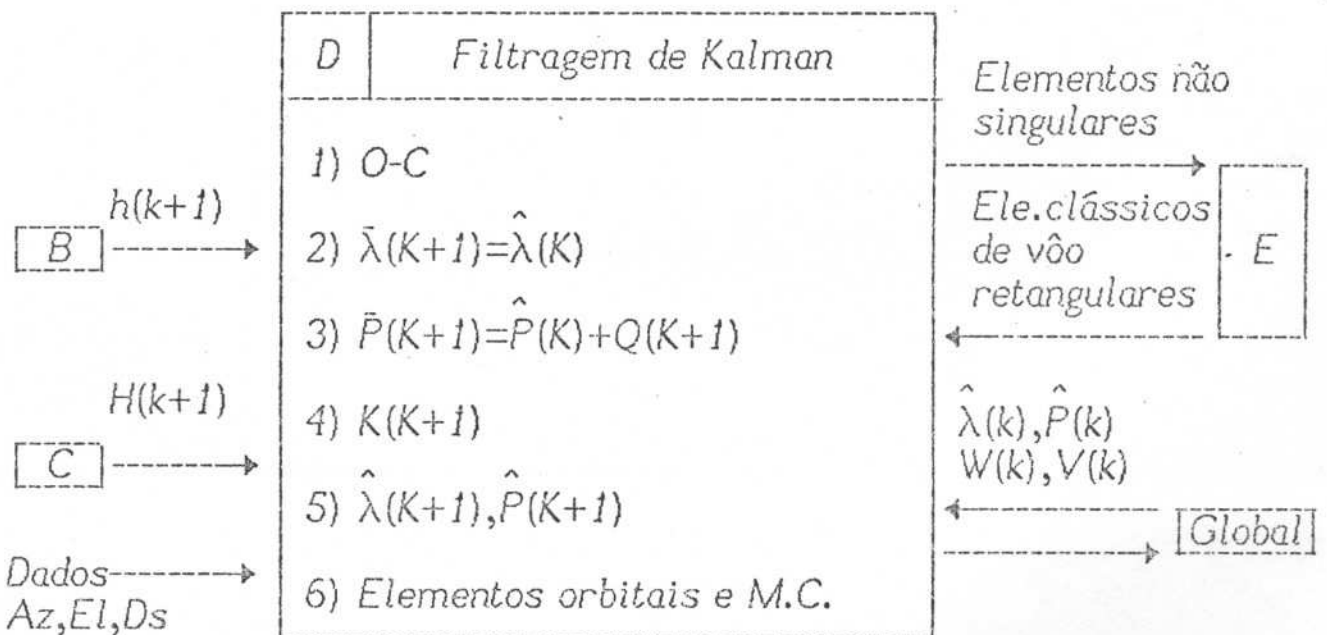
Módulo B - Calcula o vetor observação (azimute, elevação e distância) e as coordenadas topocêntricas do satélite



Módulo C - Calcula a derivada do vetor observação com o vetor estado - Matriz H



Módulo D - Determina a órbita através do filtro de Kalman



## REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Allan,R.R.:1963, "Perturbations of Geostationary Satellites by the Longitude Dependent Terms in the Earth's Gravitational Field", *Planetary and Space Science*, Vol.11, 1325-1334.
- Balsam,R.E. and Anzel,B.M:1969, "A simplified Approach for Correction of Perturbations on a Stationary Orbit", *J.Spacecraft*, Vol.6, No.7, 805-811.
- Belon,B.:1983, "Restitution D'orbite en temps Reel pendant Les Manoeuvres D'apogee", *Centre National D'etudes Spatiales, Projet TDF 1*.
- Bierman,G.J.:1977, "Factorization Methods for Discrete Sequential Estimation", *Academic Press - New York*.
- Blitzer,L.:1965, "Equilibrium Positions and Stability of 24-hour Satellite Orbits", *Journal of Geophysical Research*, Vol.70, 398-399.
- Canesin da Silva,W.C.:1982, "Determinação de Expressões Analíticas Simplificadas para Cálculo e Propagação de Órbitas Mediante o Uso de Teoria de Estimação de Parâmetros", *INPE - 2320 - TDL/80 - Tese de Doutorado*.

- Cappellary, J.O. and Fuchs, A.J.: 1976, "Mathematical theory of the Goddard Trajectory Determination System", Nasa TM-X-71106, X-582-76, N76-24291.
- Chebotarev, G.A.: 1967, "Analytical and Numerical Methods in Celestial Mechanics", American Elsevier Publishing Co., New York.
- Cot, D.: 1984, "Evolution de L'Orbite D'Un Satellite Geostationnaire Analyse et Application au Positionnement du Satellite Symphonie B", L'Universit Paul Sabatier de Toulouse - these.
- Davies, M.E.: 1986, "Report of the IAU/IAG/COSPAR working group on cartographic coordinates and rotation elements of the planets and satellites: 1985", *Celestial Mechanics* 39, 103-113.
- de Paiva, R.N.: 1981, "Determinação de Órbitas de Satélites Artificiais Através de um Estimador, na Presença de Acelerações não Modeladas, Usando a Transformação K-S", Instituto de Pesquisas Espaciais, INPE - 1998-TDL/40 - Tese de Mestrado.
- de Paiva, R.N.: 1988, "Procedimentos de Estimação de Estado aplicáveis em Sistemas de Determinação da Órbita a Bordo de Satélites Artificiais"-Tese de Doutorado - INPE
- Ferraz-Mello, S.: 1972, "Analytical Studies of Earth's Shadowing Effects on Satellite Orbits", *Celestial Mechanics*, Vol.5, 80-101.

- Gedeon, G.S.: 1969, "Tesseral Resonance Effects on Satellite Orbits", *Celestial Mechanics* 1, 167-189.
- Jazwinski, A.H.: 1970, "Stochastic Process and Filtering theory", Academic Press - New York.
- Kalman, R.E.: 1960, "A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems", *transactions of the ASME (D82)*: 35-45.
- Kamel, A.A.: 1978, "Synchronous Satellite Ephemeris due to Earth's Triaxiality and Luni-Solar Effects", AIAA/AAS Astrodynamics Conference, Palo Alto, Calif..
- Kamel, A.A. and Wagner, C.A.: 1981, "On the Orbital Eccentricity Control of Synchronous Satellites", AAS/AIAA Astrodynamics Specialist Conference, Lake Tahoe, Nevada.
- Kaula, W.M.: 1966, "Theory of Satellite Geodesy", Blasidell Publishing Co., Waltham, Mass.
- Kaula, W.M.: 1967, "Review of Tesseral Harmonics Determination from Satellite Orbity Dynamics", *Proceedings of the II International Symposium on the use of Artificial Satellites for Geodesy*, edited by G. Veis, Athens, Greece, 133-147.

Kes, F.C., Lagowski, R.G. and Grise A.J.: 1980, "Performance of the Telesat Real-time State Estimator", AIAA 8th Communications Satellite Systems Conference, Orlando-Florida.

Kozai, Y.: 1973, "A New Method to Compute Luni-solar Perturbations in Satellite Motions", Smithsonian Astrophysical Observatory, Special Report 349.

Legendre P.: 1980, "Le Mouvement du Vehiculé Spatial Orbite", Publié par Centre National d'études Spatiales. Course de Technologie Spatiale, 1980.

Liebelt, P.B.: 1967, "An Introduction to Optmal Estimation", Addison-Wesley Publishing Company.

Marchal, C.: 1975, "Qualitative Methods and Results in Celestial Mechanics", 26th International Astronautical Congress, Lisboa.

Mease, K.D., Ryne, M.S. and Wood, L.J.: 1985, "An Approach to Autonomous, Onboard Orbital Determination", the Journal of the Astronautical Sciences, Vol.33, No.2, 163-178.

Orlando, V., Rios Neto, A. and Kuga, H.K.: 1986, "Batch and Sequential Data Smoothing Compression by Curve Fitting Using an Adaptive State Estimation Technique", INPE - 3885-PRE/935.

Panigada, H.: 1986, "Evolution de L'Orbite D'un Satellite Geostationnaire : Le Modele Masq" - Centre National D'etudes Spatiales, Toulouse.

Rios Neto, A e Canesin da Silva, W.C.: 1983, "Procedimento Semi-analítico Baseado em Estimacão de Parametros para Propagações de Órbitas de Satélites Artificiais", VII Congresso Brasileiro de Engenharia Mecânica, Uberlandia.

Rios Neto, A e Kuga, H.K.: 1981, "Estimacão adaptativa e em tempo real de órbitas de satélites artificiais a baixa altitude", Instituto de Pesquisas Espaciais, INPE - 2088 - RPE/318.

Rios Neto, A e Tapley, B.D.: 1975, "Estimating the State of Nonlinear Dynamical Systems in the Presence of Unmodeled Accelerations, Proceedings of the COBEM, No.D-9, 962-982., Rio de Janeiro.

Rios Neto, A e Kuga, H.K.: 1982 "Estimacão Adaptativa do Ruído no Estado para o Filtro de Kalman", INPE - 2440-PRE 141.

Rogers,C.E.:1971, "The Extended Kalman Filter Applied to the Determination of the Orbital Parameters of a Passive Earth Satellite", Air Force Institute of Technology - Air University, Ohio.

Shallon,C.R.: 1983 "Synchronous Satellite Dynamic Analysis and Operations Software", Course I - Orbital Analysis; Hughes Aircraft Company-Hughes Ref. NO.F1532 SCG No.8410068 E1 Segundo-Ca.

Shrivastava,S.K.: 1978 "Orbital Perturbations and Stationkeeping of Communications Satellites", J. Spacecraft, Vol.15, No.2.

Soop,E.M.:1983, "Introduction to Geostationary Orbits", European Space Agency, Edited by W.P.Burke ISSN 0379-6566.

Tapley,B.D.,Peters,J.G. and Schutz,B.E.:1981, "Relative Performance of Algorithms for Autonomous Satellite Orbit Determination", the Journal of the Astronautical Sciences, Vol.XXIX, No.1, 35-57.



Todos os Interessados em Publicações do  
Observatório Nacional. Devem Dirigir-se a

MCT - CNPq  
Observatório Nacional  
Biblioteca  
Setor de Reprodução Gráfica  
r. Gal. José Cristino, 77 - CP. 23002  
20921 - São Cristovão, RJ  
BRASIL  
Telf. 5807313 - r.271